

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI**

*Əlyazması hüququnda*

**ÖZLÜ QABARCIQLI MAYELƏRLƏ DOLDURULMUŞ  
DEFORMASIYALANAN BORUDA DALĞALAR**

İxtisas: 2003.01 – Maye, qaz və plazma mexanikası

Elm sahəsi: riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru

elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

**DİSSERTASIYA**

İddiaçı: \_\_\_\_\_

Reyhan Səyyad qızı Əkbərli

Elmi rəhbərlər:

prof. Rafael Yusif oğlu Əmən zadə

\_\_\_\_\_

f.r.e.n.,dos. Yusif Məmmədli oğlu Sevdimaliyev

Bakı-2021

## Mündəricat

	səh.
Giriş.....	4
I Fəsil. “Maye – örtük” hidroelastiki sistemində dalğaların yayılması məsələsinin qoyuluşu və həllinin icmalı.....	22
1.1. Maye – qaz sisteminin xüsusiyyətləri .....	22
1.2. Maye və qabarcığın qarşılıqlı münasibəti.....	25
1.3. Qabarcıqlı mayelərdə əsas fərziyyələr və riyazi təsvirin xüsusiyyətləri.....	30
1.4. Elastiki silindrik boruların hərəkət tənlikləri.....	32
1.5. Momentli nəzəriyyədə ortotrop örtük üçün dispersiya tənliyi.....	48
1.6. Borularda maye – qaz qarışığının axınının xüsusiyyətləri.....	53
II Fəsil. İkifazalı özlü mayenin deformasiya olunan elastiki örtüklərdə hərəkətinin riyazi modeli.....	63
2.1. Sferik qabarcıqlı maye – örtük sisteminin hidrodinamik xarakteristikalarının özlülüyün bir halı üçün riyazi analizi.....	63
2.2. Örtüyün hərəkət tənliyi.....	66
2.3. Sərhəd məsələsinin həlli.....	70
2.4. İkifazalı özlü mayenin deformasiya olunan elastiki örtüklərdə hərəkətində axının sərfi.....	83
III Fəsil. Özlü – elastik örtükdə sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti .....	90
3.1. Boruda axan mayədə yaranan dalğaların ətraf mühitin özlü elastik sürtünməsinə nəzərə alınmaqla tədqiqi .....	90
3.2. Elastik boruda özlü elastik sürtünməni nəzərə almaqla boruda axan mayədə yaranan dalğaların analizi.....	99
3.3. Özlü – elastik örtükdə sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti.....	106
IV Fəsil. Sükunətdə olan maye ilə doldurulmuş böyük uzunluqlu silindrik elastik örtükdə kiçik həyəcanların yayılması.....	114
4.1. Qabarcıqlı mayenin və örtüyün hərəkətinin riyazi modeli.....	115
4.2. Hidroelastiklik məsələsinin riyazi həlli.....	120

4.3. Ədədi nəticələrin alınması və analizi.....	126
Nəticə.....	137
İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı.....	138

## Giriş

Xalq təsərrüfatının və sənayenin bir çox sahələrinin praktiki məsələlərinin həllində mayelər geniş tətbiq olunur: istilik energetikası, kimya, neft sənayesi və s. Mayelərin tətbiqi ilə baş verən əksər dinamik proseslər onlarda qabarcıqların yaranması ilə müşahidə olunur. Maye ilə doldurulmuş örtüklərin mayenin hissəcikləri ilə qarşılıqlı təsirinin dinamikası məsələləri Bütöv mühit mexanikasının-deformasiya olunan mühitlər (maye, örtük, qabarcıq, buxar və s.) mexanikasının vacib problemlərindəndir. Qabarcığın mayədə olması qarışığın fiziki və mexaniki xassələrinin əhəmiyyətli dərəcədə dəyişməsinə səbəb olur. Tətbiq nöqtəyi nəzərindən bu dəyişmələr faydalı və ya arzuolunmayan ola bilər.

Maye qaz və deformasiya olunan bərk cisimdən ibarət hidroelastiki sistemlərdə riyazi modelin qurulması və konkret problemin həlli aktual nəzəri və tətbiqi əhəmiyyətə malikdir. Hidrodinamika, o cümlədən hidroelastiklik tənliklərinin alınmasında makromexanika nəzəriyyəsində fenomenoloji üsulundan istifadə olunur. Çoxfazlı və çoxkomponentli bütöv mühitin hərəkətinin riyazi modelləşməsi hər bir faza və komponentlər üçün kütlənin saxlanması haqqında kütlə balans tənliyi, hərəkət impulsunun balans, enerjinin saxlanması qanunu və termodinamikanın ikinci qanunlarının riyazi tənliklərindən ibarətdir. Qurulan riyazi modeldə tənlikləri konkret münasibətlərlə tamamlamaq lazımdır. Bu münasibətlərə mühitin mexaniki, termodinamik, bəzən də elektromaqnit, kimyəvi və digər xassələri daxildir.

Qabarcıqlı mayelərin xassələri qabarcıqların formasının sferik qalmasına əsaslanır, xüsusilə də bu daha çox qabarcıqların böyük dartılma və sıxılmaya məruz qaldığı hallarda qabarcıq olur. Silindrik örtükdə qabarcıqlı mayenin dinamikasının fizikası və məsələnin ümumi riyazi qoyuluşu sistemdə təzyiqin dəyişməsindən çox asılı olur. Qabarcıqlı mayelərin hissəcikləri ilə örtüklərin qarşılıqlı təsir dinamikasının məsələləri nəzəri və praktiki əhəmiyyətinə görə riyazi fizika və bütöv mühit mexanikası sahəsində tədqiqatların aktual predmetini təşkil edir. Elastiki konstruksiyaların maye ilə qarşılıqlı təsirlərinə aid praktiki məsələlərdə, mühəndis qurğuların və konstruksiya elementlərinin xarici mühitlə (maye və qaz) kontakt

şərtlərinin nəzərə alınması hallarında texnoloji istismar şərtləri və sahə inşaat normalarının tələbləri əsas götürülür.

Nazikdivarlı elastiki konstruksiyalarda maye və qaz mühitin qarşılıqlı təsirindən yaranan qüvvə konstruksiyanın deformasiyasından asılı olur. Örtük divarlarında deformasiyalanan yayılma sürəti mayədə dalğanın yayılma sürətindən çox böyük olduğundan örtükdə çevrə boyu elastiki dalğalar mayədə təzyiq cəbhəsini dəfələrlə qabaqlayır. Nəticədə həlqəboyu normal gərginlik bütün örtük boyu keçib getdiyi halda, örtük-dalğa ilə əhatə olunur.

Maye-örtüksistemin mexanikası müasir texnika ilə bərabər biofizikanın qan damarlarında və orqanizmlərdə qan dövranının dinamik proseslərinin riyazi modelləşdirilməsində tətbiqini tapır. Mayələrin axını prosesində səthini islatdığı cisim ilə qarşılıqlı təsirinin qanunlarının tədqiqi müxtəlif maye modelləri üçün aparılır (özlü maye, özlü olmayan maye, maye buxar qarışığı, qabarcıqlı maye, bərk hissəcikləri olan maye və s.).

**Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.** Mühitin çoxfazlılığının effekti bu mühitdə baş verən hidrodinamik proseslərin və hərəkətin tədqiqatını çətinləşdirir. Bu özünü daha kəskin rəqslərdə və zərbə təsirlərində yaranan dalğaların yayılmasında göstərir. Qabarcıqlı mayələrin boruda axınında həyəcanlanmaların yaratdığı dalğaların yayılması tədqiq edilmişdir. Göstərilən proseslərin qanunauyğunluqlarının öyrənilməsində, energetik qurğuların yaradılması üçün müasir texnologiyalarda, həm də hərbi işlərdə və s. yeni üsulların işlənməsi və onların analizinin elmi əsaslarının yaradılmasında müstəsna əhəmiyyətə malikdir. Tədqiqat işində energetikanın bir çox sahələrindəki məsələlərdə, neft – kimya texnoloji proseslərində, neft emalında bir ölçülü stasionar qaz – maye axını olan halları üçün xarakterik olan dalğavari hərəkət tədqiq edilmişdir. Heterogen mühitlərin hidrodinamika məsələlərində bütöv mühit mexanikası mövqeyindən aparılan tədqiqatlarda bir qayda olaraq fizikanın bir çox bölmələrinin, o cümlədən zərbə dalğaları fizikası, qaz dinamikası, partlayış fizikası, hidravlika, istilik fizikası və süzülmə nəzəriyyəsinin nəticələri birgə müzakirə olunur.

**Tədqiqatın obyektı və predmeti.** Maye və qaz qabarcıqlarından ibarət olan ikifazlı mühitin yerləşdiyi nazik sonsuz dairəvi en kəsikli silindrik örtükdən ibarət hidroelastiki sistemdə monoxromatik mənbənin yaratdığı kiçik həyəcanlanmalardakı dalğaların yayılmasının riyazi modelləşdirilməsi və həlli.

**Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.** Çoxfazlı heterogen maye mühitlə dolu silindrik örtükdən ibarət hidroelastik sistemdə dalğaların evolyusiyasının xüsusiyyətləri öyrənilir. Neft – qaz qarışıqlarının və müxtəlif təyinatlı su boru kəmərlərində qabarcıqların başlanğıc həcmi konsentrasiyasından asılı olan hidrodinamik xarakteristikaları təyin etmək, alınan nəticələrin məlum həllərlə müqayisəsi hərəkətin kiçik sürətlərində prosesin mürəkkəb modellərlə tədqiqinə uyğun olmasını göstərməkdir.

**Müdafiyyə çıxarılan əsas müddəalar.** Dissertasiya işində aşağıdakı əsas elmi nəticələr alınmışdır:

İkifazlı maye və qaz qabarcığı olan sonsuz uzun nazik divarlı elastiki örtük hidroelastiki sistemdə monoxromatik rəqslər nəticəsində dalğaların yayılmasının, maye mühitlə örtük arasındakı səthlərdə kinematik və dinamik kontakt şərtləri, uclardakı sərhəd şərtləri nəzərə alınmaqla riyazi modeli qurulmuşdur.

Mayenin müxtəlif fiziki xassələri – sıxılan, sıxılmayan, qeyri-özlü, özlü Nyuton mayesi, xətti özlü elastiki; qaz qabarcıqlarının kürəşəkilli sabit diametrlili, örtüklərin isə elastiki düzoxlu dairəvi en kəsikli nazik divarlı izotrop və ortotrop hallarında qoyulan riyazi məsələlərin analitik həlləri alınmışdır.

Hidroelastiki sistemin fazalarının və komponentlərinin həndəsi xarakterik və təcrübi fiziki – mexaniki parametrlərinin müxtəlif qiymətləri üçün dalğaların dinamik və kinematik xarakteristikaları dəqiqləşdirilmiş və xarakterik asılılıq əyrilərinin qrafikləri qurulmuşdur.

**Tədqiqatın metodikası.** Analitik alınmış nəticələr ikifazlı maye-örtük hidrodinamik sisteminin bütöv mühit mexanikasının və fizikanın ümumi qanunları və prinsiplərindən fenomenoloji üsullarla alınmış riyazi modelin analitik həllinə əsaslanır. Tədqiqatda heterogen maye məhlulu ilə birlikdə örtüyün

həyəcanlanmasından yaranan akustik (səs) dalğaların sistemin komponent və fazalarının müxtəlif fiziki parametrlərdən asılı hidrodinamikası öyrənilmişdir.

**Tədqiqatın elmi yeniliyi.** Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

Qaz qabarcıqları olan ikifazlı maye qarışığının sonsuz uzun nazik örtükdə hidroelastiklik məsələsinin riyazi modelləşdirilməsi aparılmış, dalğa xarakteristikalarının müəyyənəndirilmiş və analitik həllər alınmışdır.

Çoxfazlılıq xüsusiyyətinin birfazlı maye ilə dolu örtükdə dalğaların yayılmasının təsirindən əsaslı fərqləndiyi göstərilmişdir. Təqdim olunan iş qabarcıqlı özlü maye mühitlə silindrik elastik örtükdən ibarət hidroaeroelastik sistemdə maye faza ilə bərk cisim olan örtüyün birlikdə qarşılıqlı təsirinin araşdırılmasına və yeni nəticələrin alınmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində alınmış əsas nəticələr yenidir, bu nəticələr alınmış analitik həllər və qurulmuş müqayisəli qrafiklərlə tam təsdiq olunmuşdur.

Məsələnin həlli bütöv mühit mexanikası problemlərinin həllinə riyazi fizikanın Füyrenin dəyişənlərə ayrılan funksiyaların hasili kimi axtarılması metodunun və transendent cəbri tənlik olan dispersiya tənliyinin biseksiya üsulunun tətbiqi ilə alınmışdır.

**Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti.** Dissertasiya işində alınmış nəticələr qabarcıqlı mayelərdə dalğaların yayılması məsələsinin nəzəri əsaslarının hazırlanması və praktiki hesablamaların aparılmasında istifadə edilə bilər. Mürəkkəb quruluşlu çoxfazlı maye – qaz mühitinin deformasiya olunan bərk cisim və konstruksiyalardakı axınlarında, həmçinin su və quruda nəqliyyat sistemlərinin, uçan obyektlərin və aparatların yanacaq və maye nəqliçisi texnoloji sistemlərində tətbiq oluna bilər. Karbohidrogen nəql olunan boru xətlərində, biosistemlər və orqanizmlərin qan damar sistemində baş verən fiziki və mexaniki proseslərin analizində və layihələndirilməsində istifadə oluna bilər.

Dissertasiya işinin mövzusunə aid nəşr olunmuş tədqiqatların qısa icmalını verək.

Mayelərin müxtəlif formalı örtüklərdə hərəkəti ilə bağlı tədqiqatlar 19-cu əsrdə başlamışdır. Bu tədqiqatlar sırasında ideal və ya özlü olmayan mayenin uzunluğu boyu kəsilməz olaraq dəyişən düzbucaqlı kəsiyi olan kanalda dalğalarını tədqiq edən Qrinin işlərini qeyd etmək lazımdır. Sabit dərinlikli, dairəvi və eliptik formalı hövzədəki mayenin rəqsləri S.D.Puasson, L.Reley və H.Lamb tərəfindən tədqiq edilmişdir. Sonrakı dövrdə bu istiqamətdəki işlər Adamar və Sena tərəfindən aparılmışdır. Onlar sonlu ölçülü qabda rəqs edən mayenin səthinin formasını, üfiqlə müəyyən bucaq altında hərəkət edən mayədə yaranan dalğaları tədqiq etmişlər. A.Qrin, S.D.Puasson, L.Reley və H.Lambın əsərlərindəki həll metodlarına əsasən, məsələ xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllinə gətirilir, burada sərbəst funksiya mayenin sərbəst səthinin həyəcanlaması kimi qəbul edilir. Adamar maye hissəciyinin başlanğıc vəziyyətindən kənarlaşması ilə əlaqədar məsələni müəyyən inteqro-diferensial tənliyin həllinə gətirmək üçün metod təklif etmişdir. O, göstərmişdir ki, sonlu ölçülü fəzada ideal mayenin rəqsləri haqqında məsələ, inteqral tənliklər nəzəriyyəsinin metodları ilə tam həll edilir. Daha sonra ideal mayenin rəqsləri haqqında məsələ başqa xüsusi hallar üçün də həll edilmişdir.

Bir çox tətbiqi məsələlərin həlli zamanı elastiki və ya deformasiya olunmayan bərk cisimlərin və mayelərin qarşılıqlı təsirinin dinamik proseslərini öyrənmək ehtiyacı yaranır. Bu cür problemlərin tipik nümunələrinə maye yanacaq mühərrikləri, təyyarə və maye yanacaq kütlələrini daşıyan uçan nəqliyyat vasitələrinin möhkəmliyə, dayanıqlığa dinamik hesabalarını misal göstərmək olar. Əksər hallarda, cisimlərin maye ilə qarşılıqlı əlaqəsinə dair araşdırma apararkən, "cisim – maye" sisteminin riyazi modelinin təhlili üçün "əlverişli" model əldə etməyə imkan verən müxtəlif sadələşdirmələr və fərziyyələr qəbul olunur. Beləliklə, qəbul olunur ki, cisim elastiki olduğu halda, daşıyıcı cismin yerdəyişməsi (deformasiyası) praktik olaraq kiçik olur. Buda yaranan dinamik prosesləri hərəkətin xətti diferensial tənlikləri bazasında öyrənməyə imkan verir. Eyni zamanda mayenin kiçik dalğavari hərəkəti hipotezi qəbul olunur. Nəticədə maye fazasının hərəkəti xəttiləşdirilmiş diferensial tənliklərinin tətbiqinə əsas verir. Bu cür yaxınlaşma kiçik rəqslərdə örtük-maye birgə sisteminin tezlik spektrini araşdırmağa, kiçik



yerdəyişmələrdə hərəkətin dayanıqlığını, sərbəst səthin məxsusi rəqslərinin formasını müəyyənləşdirməyə imkan verir.

19-cu əsrin sonlarında J.Strett [74], [75] işlərində örtüyün rəqslərini sadə osilyatorlar üçün tədqiq etmiş və rəqslərin formasını müəyyənləşdirmişdir. V.V.Bolotin [26] örtüklər nəzəriyyəsinin dinamikası məsələlərində geniş tədqiqatlar aparmışdır. [27]-ci iş elastiki dalğaların yayılması məsələsinə dünya alimlərinin elmi icmalına həsr olunmuşdur. Sonlu elementlər metodu ilə örtüklərdə dalğa prosesinin tədqiqatına aid [39],[123] işlərində, ədədi üsullarla rəqslərin yayılmasının tədqiqatı isə [35], [40], [41] işlərində aparılmışdır.

Dissertasiya işinin mövzusunə yaxın olan tədqiqatlardan olan [120] işində göstərilmişdir ki, oxasimmetrik və qeyri-oxasimmetrik rejimlərdə Vlasovun yastı örtüklər nəzəriyyəsi əsasında alınmış təqribi dispersiya tənliyi Donel-Muştarinin ümumi örtüklər nəzəriyyəsinin verdiyi nəticələrə yaxındır. Yalnız kiçik tezlikli əyilmə rejimlərində bu hal pozulur.

Maye ilə doldurulmuş və ya mayeyə salınmış örtüklər nəzəriyyəsinin dinamika məsələsinin həlli üzrə çoxsaylı tədqiqatlara A.N.Quz [37], R.Y.Əmənzadə [19-24], A.S.Volmir [32], M.A.İlqamov [49], A.Z.Averbux [16] və s. alimlərin işləri daxildir. [32]- işində sonsuz uzun nazik dairəvi örtüklərin məxsusi rəqslərini xarakterizə edən ümumi asılılıqlar örtüyün daxilində məlum sürətlə ideal mayelərin axını üçün araşdırılıb. Sistemin riyazi münasibətləri elastiklik nəzəriyyəsinin və ondan alınan örtüklər nəzəriyyəsinin münasibətləri ilə verilmişdir. Həmçinin maye ilə qarşılıqlı təsirdə olan örtüklərin dinamika məsələləri, ideal maye ilə doldurulmuş sonsuz uzun örtüyün məxsusi rəqsləri və onların müxtəlif növləri araşdırılmışdır. [106]- işində sıxılan qeyri-özlü mayədə oxasimmetrik dalğaların yayılması analiz olunur. Maye silindrik elastiki örtük daxilində olan zaman faza sürətinin sistemin ölçsüz parametrlərindən asılı tezliyin funksiyası kimi analiz olunur.

Maye ilə qarşılıqlı təsirdə olan dalğaların yayılması məsələsinin tədqiqinə həsr olunmuş [36], [39], [46], [47]- işlərində oxasimmetrik halda dalğa prosesinin analizi və mayeyə daxil edilmiş örtüyün əyilmə rəqslərində və qeyri-oxasimmetrik rəqslərindəki vəziyyəti tədqiq olunub. [111-113]- monoqrafiyalarında boşluğu olan

elastik cisimlərin vibrasiyası, onlardakı dinamik problemlərin elastiklik nəzəriyyəsi əsasında asimtotik analizi aparılmışdır.

[101], [102]- işlərində maye ilə doldurulmuş örtüklərdə dalğa ədədini xarakterizə edən ifadələr asimtotik metodun tətbiqi ilə alınıb. Belə qapalı formalar prosesin fiziki mahiyyətini ədədi üsullardan fərqli olaraq aydın təsəvvür etməyə imkan verir. [118]-işində Donel-Muştari nəzəriyyəsinə əsasən oxasimmetrik və əyilmə rejimlərində rəqslər üçün dalğa ədədinin alınmış asimtotik ifadəsi həm boş, həm də maye ilə dolu izotrop və ortotrop örtüklər üçün verilmişdir. [104]- işində maye sürətinin və mühitin ətalət xassəsinin örtüyün məxsusi rəqslərinin tezliyinə təsiri ortotrop silindrik örtük üçün tədqiq edilmişdir. Mühitin, örtüyün və mayenin tənlikləri, kontakt şərtlərindən ibarət riyazi model nəzərə alınıb.

Maye ilə doldurulmuş sonsuz silindrik örtüklərdə sərbəst rəqslərin yayılması məsələsi [122]-da araşdırılmışdır. Burada dalğa ədədi xalis, həqiqi və kompleks olan hallarda və məsələnin fiziki mahiyyətinə uyğun götürülmüş, parametrik məhdudiyyətlər təyin olunmuşdur. [29], [66]- işlərində bu prosesin sıxılan maye ilə dolu örtüklərin rəqsləri analiz olunub.

[24], [22]- işlərində maye ilə dolu örtüklərdə dalğaların yayılması prosesində Kirxoff nəzəriyyəsi ilə alınması mümkün olmayan çoxlaylı və çoxqatlı yeni dalğaların yayılması göstərilib. İdeal sıxılmayan mayelərin oxasimmetrik halda hərəkəti xəttiləşmiş tənliklər ilə aparılıb. Örtüklər çoxsaylı və uclarında bağlı olmayan halda götürülüb və sürüşmə deformasiyası nəzərə alınıb.

Kirxof – Lyav hipotezinə əsaslanaraq Flyuqqe nəzəriyyəsinin [98] böyük əhəmiyyəti vardır. Buna əsasən deformasiyalar, yerdəyişmələr və örtüyün ayrılığının orta radiusunun dəyişməsi arasında asılılıqlar üçün münasibətlər alınabilir. Maye ilə doldurulmuş örtüyün dinamikasının öyrənilməsi praktiki cəhətdən əhəmiyyətə malikdir. Maye ilə doldurulmuş örtüyün tədqiqini şərti olaraq aşağıdakı istiqamətlərə bölmək olar. Birincisi örtük-maye sisteminin sərbəst rəqsi hərəkətinin tədqiqi, ikinci: sistemin dayanıqlıq suallarının öyrənilməsi, üçüncü: belə sistemlərdə qeyri-stasionar dinamik proseslər, dördüncü: örtüklər nəzəriyyəsinin dinamik məsələləri. Maye ilə örtüyün birlikdə dinamik məsələlərinin həlli və məsələnin qoyuluşunun mürəkkəbliyi

ondan ibarətdir ki, ikiölçülü sistem qəbul olunur və mayenin hərəkəti və örtüyün hərəkəti hidrodinamik qüvvələri ilə bağlıdır. Deformasiya olunan örtük və maye arasındakı qarşılıqlı təsir çox vaxt örtüyün özünün deformasiyasından asılıdır.

Bu sahədə tez-tez istinad edilən tədqiqatlardan H. Lambın [105] apardığı tədqiqatdır ki, burada nazik silindrik örtükdə qeyri-özlü sıxılmayan maye yayılan oxasimetrik dalğanın dispersiyası tədqiq edilmişdir. Örtüyün hərəkəti Kirxof-Lyav nəzəriyyəsi çərçivəsində təsvir edilmiş və nəticələr kiçik dalğa ədədi olan hallar üçün təqdim olunur.

Maye tərəfindən örtüyə verilən yükün təyin olunması üçün, eyni vaxtda örtüyün özü ilə tədqiqat aparmaq lazımdır. Bu zaman örtüyün hərəkəti elastiklik nəzəriyyəsinin tənlikləri ilə ifadə olunaraq, mayenin hərəkəti hidromexanikanın tənlikləri ilə ifadə olunur, sərhəd şərtləri isə örtük üçün adi sərhəd şərtləri kimi qəbul olunur.

Məsələnin mürəkkəbləşməsinə təsir edən faktorların seçilməsi mayenin modelindən asılıdır. Sıxılmayan və ya sıxılan, ideal və ya özlü sxemləşdirməsini təyin etmək üçün tələb olunur ki, maye və örtük arasındakı sərhəd şərtlərini seçmək lazımdır. Əgər heç bir sadələşdirmə aparılmasa, onda örtük- maye hərəkəti çox mürəkkəbləşir və bu halda məsələnin riyazi olaraq həlli çox çətin olur.

Maye ilə örtüyün birlikdə hərəkətini araşdıran zamanı dalğaların yayılması prosesinə mayenin və ya örtüyün səbəb olması araşdırılır.

[55]- işində sıxılmayan maye ilə doldurulmuş silindrik örtükdə dalğanın yayılmasına ortotropiyanın təsiri Timoşenko nəzəriyyəsinə əsasən öyrənilib və ölçüsüz faza sürətinin ölçüsüz tezlikdən asılılıq qrafikləri tədqiq edilib.

[132]- işində yarımanalitik üsula əsasən üçölçülü elastik silindrik kompozit örtüklər tədqiq olunur.

[109]- işi nazik örtüklərdə kiçik vibrasiyalara və deformasiyalara aid məsələlərə baxılmışdır.

Müasir dövrdə sənaye və texnologiyada silindrik örtüklərdə dalğanın yayılmasının vint anizotropiyanın xüsusiyyətlərinin tədqiqi çox aktualdır. Bu məsələlərin həllində İ.P.Panfilov və ya Y.A.Ustinovun böyük rolu olmuşdur

Vint anizotropiyasına aid Sen-Venan məsələlərin həllinə aid işlər [78]-də görülmüşdür. [64], [65] işlərində anizotropiya ilə birlikdə örtüyün xüsusiyyəti və dalğanın yayılmasının Kirxrof-Lyav və Timeşenko- Reysner modeli ilə verilmişdir.

Oxasimmetrik və əyilmə rəqsləri halları üçün [117] işində dispersiya tənlikləri alınmış və onların həlli analiz edilmişdir. [65] işində göstərilmişdir ki, üçölçülü elastiklik nəzəriyyəsinə əsasən uzununa və burucu rəqslər arasında əlaqə harmonik rəqsi dalğanın vint anizotropiyası ilə dolu silindrə yayılma xüsusiyyəti tədqiq olunmuşdur. Yüksək tezlikli rəqsin analizi üçün hesablama üsulu və onun kritik tezliyini və dispersiya əyrilərinin qurulması metodu verilmişdir.

[28]- işində müxtəlif stekloplastikadan ibarət olan örtüyün silindrik örtüyün sərbəst rəqsi hərəkətinin rəqs tezliyinin tapılmasının nəticəsi verilmişdir. Mayenin sərhəd şərti ilə sərbəst rəqsi hərəkətinin tezliyinin hesabı Reley – Rits üsuluna əsasən örtüyün müxtəlif həndəsi ölçüləri və elastik əmsallardan asılı olmaması göstərilmişdir. Alınan nəticələr eksperimental və ədədi hesablamalarla ortotrop örtüklər ilə silindrik elastiki örtüklərdə rəqsi hərəkətlər tədqiq olunub. Ortotrop örtüklərin klassik tənliklərinə əsasən, maye ilə dolu örtüyün birgə dispersiya tənlikləri alınmışdır. Kiçik tezlikli rəqsin vəziyyətini analiz etmək üçün təqribi birölçülü model təklif olunmuşdur. Örtüklü və təqribi modellər üçün dispersiya əyriləri analiz edilmişdir. İzotrop silindrik örtüklərdə vint dalğalarının yayılmasının tədqiqi V.V.Tyutekin [77] işində aparılmışdır. Bu işdə vintli dalğaların yayılmasının Kirxrof- Lyav hipotezinə əsasən dalğanın ekvivalent müstəvidə və müxtəlif bucaqlar üçün uzununa və eninə yerdəyişmələri alınmışdır. Qeyd etmək lazımdır ki, izotrop və anizotrop örtüklərdə elastiki dalğanın yayılmasının tədqiqini aktual məsələdir və onun həlli müxtəlif mühəndis təcrübəsində istifadə edilir.

Əkbərovun və digərlərin [90], [97] işlərində içərisi boş silindr və sıxılan qeyri-özlü mayedən ibarət hidroelastik sistemdə dalğaların yayılması məsələlərinin riyazi modelləşdirilməsi üçün başlanğıc gərginlikləri olan cisimlərdə elastik dalğaların üçölçülü xəttləşdirilmiş nəzəriyyəindən istifadə etmək təklif edilmişdir. Məsələnin həlli üçün diskret-analitik üsul təklif edilib, silindr və maye ilə bağlı bütün tələb olunan kəmiyyətlər üçün analitik ifadələr alınır. Daha dəqiq riyazi modelləşdirmə və

metodlar çərçivəsində müəlliflər tərəfindən təklif edilənlərdən istifadə etməklə əldə edilən ədədi nəticələr digər müəlliflərin əsərlərində əldə edilmiş müvafiq nəticələrlə üst-üstə düşür.

Konteynerlərdə və çənlərdə maye sıçrayışı problemi son bir neçə on il ərzində bir çox tədqiqatçıların diqqət mərkəzində olmuşdur. Məlumdur ki, qismən doldurulmuş rezervuarlar güclü sıçrayışın təsirini xüsusilə hiss edir. Mayenin intensiv hərəkəti rezervuarın divarlarında yüksək təzyiqə səbəb ola bilər ki, bu da konstruksiyanın dağılmasına və ya dayanıqlığın itirilməsinə səbəb olur. Su anbarının divarlarındakı təzyiq paylanması öyrənilməsi, tam doldurulmayan anbarda analoji dinamik xarakteristikaları iki qat artırma bilən yerli maksimumların təyin edilməsi daha çox diqqət çəkən məqamlardandır. M.J.Sidi öz işlərində təcilli hərəkət edən dairəvi və prizmatik rezervuarların divarlarındakı təzyiqin müəyyən edilməsinə aid məsələləri araşdırmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, dinamik xüsusiyyətlər doldurulma səviyyəsinin nisbətindən və qabın genişliyindən əhəmiyyətli dərəcədə asılıdır. P.B.Vreburq 95%-ə qədər maye doldurulmuş horizontal silindrik rezervuarın divarında zərbədən dərhal sonrakı təzyiq paylanması öyrənmişdir.

[17]- də üfüqi və şaquli təcil komponentlərinin təsiri altında sərt divarları olan iki ölçülü düzbucaqlı rezervuar üçün ədədi tədqiqatlar aparılmışdır. Özlülüyün təsirləri [125]- də öyrənilmişdir. Burada özlülüyün aşağı amplitudada və yüksək doldurulma səviyyəsində özünü göstərdiyi müəyyənləşdirilmişdir. Rezervuarlarda maye sıçrayışı problemlərinə həsr olunmuş çox saylı tədqiqatların təhlili R.A. İbrahimova aiddir.

[51]- ci iş qismən maye ilə doldurulmuş örtüklərin hidroelastik qarşılıqlı təsirinin təhlili üçün təsvir olunan üsulla çən divarlarının elastikliyinə, mayenin müxtəlif xüsusiyyətlərinə və cazibə qüvvələrinə məxsusi rəqslərin tezliklərinə təsirini öyrənməyə imkan verir. Konkret olaraq yarımsferik və silindrik örtüklər nəzərə alınmaqla həll üsulu olaraq sonlu element və sərhəd elementi metodlarının birləşməsindən istifadə edilmişdir. İşdə elastik örtükdə mayenin rəqsləri öyrənilmiş, ədədi həll üsulu hazırlanmış, ədədi və analitik nəticələrin müqayisəsi aparılmışdır. Maye və elastik örtükdən ibarət hidroelastiki sistemdə yaranan rəqslər eyni zamanda

sonlu və sərhəd elementi metodlarının birləşməsinə əsaslanaraq öyrənilib, cazibə qüvvəsi nəzərə alınmaqla, silindrik örtüyün orta qəşləri araşdırılıb. Nəticədə riyazi model qurulmuş və qismən maye ilə doldurulmuş fırlanma örtüklərinin dinamik göstəricilərini analiz etmək üçün ədədi metodun qurulması üçün nəzəri əsaslar hazırlanmışdır.

Divarı nazik olan silindrik boruda baratrop, ikifazalı, tərkibində qabarcıq olan mayədə kiçik amplitudlu dalğaların oxa simmetrik hərəkətinə [19]-cu məqalədə baxılıb. Bu məsələdə müstəvi axın üçün Kirxhof – Lyav hipotezi qəbul edilib. Uzundalğalı halda ədədi hesablamalar üçün tərkibində az miqdarda hava qarışığı olan su götürülüb. Qabarcıqların həcmi tutumunun dalğanın xarakteristikasına təsiri araşdırılıb.

Aviasiya, kosmik sənayedə və sənayenin müxtəlif sahələrində geniş istifadə olunan nazik divarlı örtüklü konstruksiyaların dizayn mərhələsində ən vacib mərhələlərdən biri dinamik hesabatlardır. Örtüklərin dinamikasının öyrənilməsinin zəruri elementi kiçik rəqslərin forması və məxsusi tezliyinin təyini məsələsidir. Xüsusi qeyd etmək lazımdır ki, aşağı spektrdən tezliklər ən çox maraq doğurur [58]. Örtüklər nəzəriyyəsinin dinamik kontakt məsələləri arasında vacib yeri elastik nazik örtüklərdə elastiki mühitlə mayenin təmasından yaranan sərbəst rəqslər haqqında məsələlər tutur.

[94]- işində elastik və maye mühitlə kontaktda olan sferik və silindrik örtüklərdə sərbəst rəqslərin forması və tezliyi öyrənilir. Xüsusi halda baxılan sistemin rəqslərinin formasını və tezliyini təyin etmək üçün asimptotik metodla sadə formullar alınmışdır. Bu isə bir sıra vacib hallarda araşdırılan proseslərin keyfiyyət analizinin aparılmasında əldə edilmiş nəticələrin istifadəsini məhdudlaşdırır. Bundan əlavə [20]-də daxilində sıxılan maye olan nazik divarlı sonsuz uzun silindrik boruda oxasimmetrik sərbəst rəqslər haqqında məsələyə baxılmışdır. Bir qayda olaraq ümumi halda sistemin məxsusi rəqslərinin tezliyinin tapılması transsendental tənliklərin həlli ilə bağlı olsa da, burada daxilində maye olmayan örtüyün rəqslərinin tezliyi sistemin rəqslərinin tezliyi ilə aşkar şəkildə ifadə olunmuşdur. Bu isə sistemin rəqslərinin tezliyini həm analitik, həm də qrafik formada tədqiq etməyə imkan verir.

Mürəkkəb qabarcıqlı mühitlərin akustik xüsusiyyətlərinin araşdırılması nəzəri və tətbiqi əhəmiyyətli mühüm məsələlərdən biridir. S.Temkin qaz və ya buxar qabarcıqlı maye qarışıq üçün müxtəlif akustik məsələlər nəzərdən keçirmişdir. Öz işlərində qaz qabarcıqlı mayədə faza sürətləri və sönmə əmsalı arasındakı asılılıqların öyrənilməsinə dair təcrübələri aparmışdır. Bu sahədə alınmış bir çox nəzəri nəticələr [41, 93]-cü işlərində dərc olunmuşdur.

Ma X. və Wang X. yeni üsulla maye mühitində hərəkət edə bilən nanorobotun təsviri araşdırmışlar. Cihazın səthinə xüsusi kapsula daxil olan qaz qabarcıqları əlavə olunaraq, ultrasəs dalğaların təsiri altında qabarcıqların növbə ilə genişlənməyə və sıxılmaya başlayaraq yapışdıqları divara təzyiqi göstərilib. Rəqslərin tezliyi qabarcıqların ölçüsündən asılıdır və rezonans tezliyinə daha yaxın olduqda, nanorobotun daha effektiv hərəkəti müşahidə edilib. Mövcud nəzəri modellər sferik qabarcıqların səth qatının elastikliyi və özlülüyünü nəzərə alaraq, rəqslərin tənliklərinin müxtəlif formalarına əsaslanıb. Church Kelvin - Foyqt reoloji tənliyinə əsaslanan mayədə sonlu qalınlıqlı özlüelastik örtükdə qaz qabarcıqlarının radial rəqslərini nəzərə alaraq Relye-Plesseta tənliyinin çevrilmiş tənliyi əldə etmiş, örtük parametrlərinin təsirini təhlil etmişdir. Daha sonra, özlü-elastik qabarcığın qabığının qalınlığı sıfıra yaxınlaşdığı haldakı modellə sadələşdirilib. Mikro qabarcıqlı polimer örtüyün impuls həyəcanlanmalarının azalmasına təsiri nəzəri və eksperimental olaraq müəyyən edilmişdir. V.Duro sıxılan özlüelastik mayədəki qaz qabarcıqlarının radial rəqslərini tədqiq etmişdir. Örtüyün elastik və özlü xüsusiyyətlərinin radial pulsasiyalarında mayenin özlüelastik xüsusiyyətlərindən üstün olduğunu işlərində göstərmişdir. Bir çox dərc olunmuş icmal məqalələrdə, o cümlədən [93]-də həmin xüsusiyyətlərə rast gəlinir. Örtük daxilində qabarcıqları olan maye axınlarına elm və texnologiyaların bir çox sahələrdə rast gəlinir.

Son əlli ildə bütöv mühit mexanikasının hidroelastiklik və elastodinamika məsələlərinin həlli nəzəri və tətbiqi əhəmiyyətinə görə bir çox alimlərin diqqət mərkəzində olmuşdur. Bu zaman həm texnika elminin günbəgün irəli getməsi, həm də maye – örtük birgəlik təsir problemlərinin həll olunan məsələləri kimi klassik hidrodinamika və elastiklik nəzəriyyələrinin əhatə dairəsinə aid məsələlər həll edilir.

L.İ.Sedov [71], A.S.Volmir [31], İ.S.Qromeqa [100], V.V. Bolotin [26], A.N.Quz [38] və s. mayelərin üç ölçülü cisimlər olan qalın divarlı sferalarda və borularda, nazik divarlı silindrik örtüklərdə axını, rəqsləri və dalğaların yayılması sahəsində əhəmiyyətli tədqiqatlar aparmışlar.

L.Eyler [103] və İ.S.Qromeqa [100] deformasiya olunan örtükdə mayenin axılması məsələsini öyrənən ilk tədqiqat işlərinin müəllifləridir. Elastiki materialdan hazırlanmış, divarları nazik olan moment kəmiyyəti mövcud olmayan boruda Nyuton mayesinin oxasimmetrik dalğalı hərəkətinin xarakterini ilk dəfə İ.S.Qromeqa [100] tədqiq etmiş və iki növ uzununa dalğanın mövcudluğunu vurğulamış və müəyyən etmişdir ki, bu dalğalardan sürəti yüksək kəmiyyətə malik olanlar örtük daxilində, sürəti kiçik kəmiyyətə malik olanlar isə maye içərisində mövcud olur.

V.Duro işlərində nazikdivarlı borunun tənliklər sistemi və xəttləşdirilmiş Navye-Stoks tənliklərini həll etmişdir. Dispersiya tənliyini almış və həmin cəbri tənlikləri həll edərək uzununa dalğaları xarakterizə edən iki müxtəlif həqiqi cəbri tənliklər tapmışdır.

D.K.Vilou və V.T.Rulo yerdəyişmələrdən asılı olmadan Yaqer qalındivarlı boruda dalğanın yayılmasını öyrənmişlər.

[129]-cu işdəki modelləri təkmilləşdirərək, J.Mirsky qalındivarlı ortotrop örtükdə axan nyuton mayələrində dalğaların yayılmasını tədqiq etmişdir. İzotrop örtük materialı xüsusi hal kimi alınaraq, qayıtma dalğalarının mövcudluğu öyrənilmişdir.

Qalındivarlı borularda dalğaların yayılmasına R.H.Koksun məqalələri həsr olunmuşdur. O, mayenin hərəkəti zamanı Navye-Stoks tənliyi nəzərə alınmaqla örtük materialını xətti, özlü-elastik deformasiya olunan bərk cisim olduğunu qəbul etmişdir.

İ.M.Skolebeva ağırlıq qüvvəsinin nəzərə alındığı, divarı elastiklik xassəsinə malik, ucunda klapan olan sonlu boruda sıxılmayan özlü mayenin axını məsələsini ədədi üsulla həll etmişdir. Dəyişkən elastik xassəli deformasiya olunan boruda sıxılmayan özlü mayenin axınını tədqiq etmişdir. Qeyri-xətti elastik boruda sıxılan



özlü mayenin hərəkəti verilmiş tənliklərlə ədədi üsulla həll edilmişdir. Borunun ani tutulmasına baxılmış, borunun sərtliyinin təzyiqa təsiri qiymətləndirilmişdir.

A.S.Volmir işlərində bifurkasiya zonasında özlü sıxılan mayenin və örtüyün mexaniki xüsusiyyətlərini örtük birtəbəqəli və bircins qəbul olunduğu zaman tədqiq etmişdir. Biomexanika probleminə həsr olunmuş işlərində qan damarlarına dair hidrodinamika problemlərini analiz etmişdir. Bu halda qan damarları daxilində özlü maye olan deformasiyalanan boru olduğunu qəbul etmişdir. Bu məsələlərdə fərz edilmişdir ki, mayenin sıxlığı təzyiqindən asılı olan xətti funksiyasıdır. Eyni zamanda daxilində ideal və sıxılan maye olan elastik boruda qeyri-xətti dinamik rəqs hadisələri ədədi üsulla araşdırmışdır. Oturacaqlarında oynaqlar olan elastik dairəvi silindrik örtükdə axan mayədə kiçik həyəcanlanmanın yayılmasını araşdıran zaman, maye ideal, sıxılan, sürəti isə mayədə səsin yayılma sürətinə nəzərən kiçik qəbul edərək, alınan nəticələri N.E.Jukovskinin nəticələri ilə müqayisə etmişdir.

M.S.Qerşteyn ideal, sıxılan maye ilə dolmuş sonlu uzunluğa malik silindrik örtükdə baş verən dinamik proseslərin tədqiqinə həsr olunan işlərə baxmışdır. Bu zaman hər təbəqəsi elastik anizotrop xassəyə malik çoxtəbəqəli örtük qəbul edərək, hündəsi qeyri-xəttiliyi öyrənmişdir. Örtük divarının yerdəyişməsi və müxtəlif zaman anlarında təzyiqi qiymətləndirmişdir.

Silindrik qeyri-kooksial örtüklərdən və örtüklər arasına fəzanı dolduran ideal sıxılmayan mayedən ibarət sistemin dayanıqlıq şərtləri və rəqslərin tezliyinin ifadəsi V.V.Buyvolun işlərində verilmişdir.

[6]-cı işdə xətti-elastik borunun daxilindəki qabarcıqlı mayədə harmonik dalğanın yayılması tədqiq olunub. Boru düzoxlu götürülüb, dalğanın əks olunma effekti nəzərə alınıb.

[7]-ci iş birölçülü hidroelastiki məsələnin riyazi əsaslandırılmasına həsr olunmuşdur. Belə ki, bu üsul kiçik amplitudlu dalğaların iki fazalı maye ilə doldurulmuş dəyişən en kəsikli xətti özlü elastiki boruda yayılmasını öyrənməyə imkan verir. Ədədi hesablamalar nəticəsində dalğanın yayılma sürətinin sıxlaşmasına təsiri araşdırılmışdır.

[8]-də daralma effekti nəzərə alınmaqla, qeyri-bircins, özlü-elastik boruda iki

fazalı mayenin döyünən axını təsvir olunmuşdur. Bu işdə bir ölçülü tənliklər əsasında içərisində maye axan ensiz boruların daxil olduğu mexaniki sistemə baxılmışdır. Tədqiq olunan sistemin riyazi modeli ideal sıxılan barotrop ikifazlı qabarcıqlı mayenin hərəkət və kəsilməzlik tənliyindən ibarətdir.

[19-20]-ci işlərdə sıxılmayan nyuton mayesi axan deformasiyalanan örtükdə dalğaların yayılması araşdırılıb.

Ortotrop materialdan hazırlanmış sonsuz uzun silindrik örtükdə oxa qeyri-simmetrik dalğaların yayılmasını R.N.Şveç nəzərdən keçirmiş və örtüyün hərəkətinin diferensial tənliklərini Timoşenko fərziyyəsinə əsas tutaraq tərtib etmişdir. Maye ilə dolmuş müəyyən məsələləri olan elastik mühitləri araşdıran zaman maye və elastiki mühit arasında fiziki-mexaniki xarakteristikalara malik örtük qismində qəbul olunan sabit qalınlıqlı təbəqənin mövcudluğunu qəbul etmişdir. Hesab etmişdir ki, örtük və mühit, örtük və maye arasında sərt birləşmə şərti ödənilir.

[21]-də çoxtəbəqəli elastik boruda sıxılmayan özlü mayenin pulsvari axını öyrənilmişdir. Burada daralma effekti nəzərə alınmışdır.

Problemin həllinə həsr olunan nəzəri və eksperimental tədqiqatlar üzrə göstərilən məqalələrdə qeyd olunan problemlər bir çox səpkidə nəzərdən keçirilmiş, bir çox dalğaların yaranması müəyyən edilmiş, maye axınının sürətinin, sərfinin, kiçik həyəcanlanmaların yayılması, məxsusi funksiya və məxsusi ədəd məsələsinin texniki məsələlərə tətbiqini nəzərə almaqla [50] onların dinamik xarakteristikalarının təyini öyrənilmişdir.

Əsas elmi müddəaların və nəticələrin dəqiqliyi aşağıdakılarla təsdiq olunur: Dissertasiya işi bütöv mühit mexanikasının və dalğa dinamikasının əsas tənliklərinə, məsələlərin riyazi qoyuluşunun korrekt bütöv mühit mexanikasının saxlanma qanunlarına, məlum eksperimental nəticələrlə uzlaşmasına, müxtəlif maye mühitlərdə qabarcıqların olduğu hallarda test hesablamalarla təmin olunan nəzəri qoyuluşu və alınan həllər sisteminin ümumi dalğa və termodinamik təsəvvürlərə zidd olmasına; hesablamaların nəticələrinin eksperimental verilənlərlə müqayisəsinə əsaslanır. İkifazlı mühitin hidrodinamikasının xüsusi hallarda tədqiq olunmuş məsələlərin işdə alınan məsələlərlə xüsusi hallarda digər müəlliflərin nəzəri hesablamaları və

eksperimentlərlə uyğunluğundan əmələ gəlir. Alınmış ədədi nəticələrin və qurulmuş qrafiklərin ikifazalı mühitlərin hidrodinamikasının tədqiq olunan məsələlərin fiziki və mexaniki müddəaları ilə uzlaşmasıdır.

**Aprobasiyası və tətbiqi.** Dissertasiyada alınan nəticələr və yeniliklər Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı elmi konfransda (Bakı-2013), AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. Y.Ə.Əmənzadənin 100-illik yubileyinə həsr olunmuş “Mexanikanın klassik və müasir problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransında (Bakı-2014), Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı elmi konfransda (Bakı-2015), AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., prof., Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş “Nəzəri və Tətbiqi Riyaziyyatın Aktual Məsələləri” respublika elmi konfransda (Şəki-2016), “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” Beynəlxalq elmi konfransda (Sumqayıt-2017), “XVIII Международная конференция-моделирование и исследование устойчивости динамических систем” (Киев, Украина-2017), III Міжнародна конференція «Розвиток науки у вік інформаційних технологій» (м. Київ | 30 вересня 2017 р.), “Актуальные направления научных исследований XXI ВЕКА”- теория и практика (2019 г.), BDU-nun 100 illiyinə həsr olunmuş IECMMA beynəlxalq konfransda (2019,26-29 Avqust,Bakı), “The 15th International Conference on Technical and Physical Problems of Electrical Engineering (14 - 15 October 2019 Istanbul, Turkey), «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях глобализации» (31 мая 2019 года Вып. 47) adlı elmi konfranslarda müzakirə olunub

**Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.** Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Mexanika-riyaziyyat” fakültəsinin “Nəzəri mexanika və bütöv mühit mexanikası” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın nəticələri [4-8, 12, 14, 81, 83, 84, 88] elmi jurnallarda 11 məqalə, 12 tezis olmaqla çap olunub.

**Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrı-ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.** Dissertasiya işi giriş, dörd fəsildən, nəticə (titul səhifəsi–377 işarə, mündəricat – 3057 işarə, giriş – 34132 işarə, I fəsil -60886 işarə, II fəsil–26775, III fəsil -24726, IV fəsil 26076, nəticə–1840 işarə) və 134 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi–177869 işarədir.

I fəsildə maye-qaz ikifazlı mühiti və nazikdivarlı silindrik örtüklərin xüsusiyyətləri, maye və qabarcığın qarşılıqlı münasibəti, qabarcıqlı mayelərdə əsas fərziyyələr və onların riyazi təsvirinin qısa xülasəsi verilmişdir. Heterogen mühit olan ikifazlı maye və qaz qabarcığından ibarət kontiniumda baş verən hərəkət və proseslərin riyazi modelləşdirilməsinin əsasları göstərilmişdir. Borularda maye-qaz qarışığın axınının xüsusiyyətləri verilmişdir, bu zaman mayenin özlülüyünün sabit və təzyiqdən xətti asılı qanunla dəyişməsi hallarına baxılmışdır. İki fazlı axınların daşınması ilə əlaqəli məsələ həll olunaraq, tam tənliklər sistemi alınmışdır. Alınmış tənliklər sistemi həm də ölçüsüz dəyişənlərdə yazılmışdır. Bu fəsildə həmçinin nazikdivarlı izotrop və ortotrop materialdan hazırlanan müxtəlif modelli örtüklərin hərəkətinin diferensial tənlikləri, həmin örtüklərin boş və müxtəlif fiziki xassəli mayelərlə dolu olduğu hallara uyğun kiçik rəqslərinin dispersiya tənlikləri və onların analizi verilmişdir.

II fəsildə sferik qabarcıqlı özlü maye-örtük sisteminin hidrodinamik xarakteristikalarının riyazi analizi verilmişdir. Mayenin riyazi modelini qurmaq üçün bütöv mühit mexanikası elminin üsulları ilə qabarcıqlı mayenin örtükdə axını zamanı riyazi tədqiqinə dair mövcud hipotezalar təqdim edilmişdir. Bu fərziyyələrin köməyi ilə qoyulmuş məsələ kifayət qədər sadələşir, ancaq bu zaman əsas məqsəd məsələnin mahiyyətini təhrif etmədən sadələşdirmə aparmaqdan ibarətdir.

III fəsildə müqayisə üçün əvvəlcə daxilində ideal maye axıdılan düz oxlu elastiki izotrop örtük üçün birölçülü nəzəriyyənin əsas fərziyyələrini nəzərə almaqla, qoyulmuş məsələyə baxılır, daha sonra isə yarımsonsuz silindrik ortotrop örtük daxilində sıxılmayan özlü mayenin pulsvari hərəkəti və özlü-elastik materialdan hazırlanmış örtükdə özlü sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti araşdırılır.

Fəslin sonuncu paraqrafının həsr olunduğu dartılma effekti nəzərə alınan özlü elastik örtükdə axan özlü elastik sıxılmayan mayedə kiçik amplitudlu dalğaların yayılması məsələsinin riyazi əsaslandırılmasının təsviri oxşar tip məsələləri ümumiləşdirir və onların həlli metodlarını inkişaf etdirir.

IV fəsildə nazikdivarlı izotrop elastiki sonsuz uzun dairəvi silindrik boru və daxilində özlü qabarcıqlı maye olan aerohidroelastiki sistemin pulsasiyalı hərəkəti 3D formatında tədqiq edilmişdir. Maye – örtük hidroelastiki sistemdə yaranan məxsusi rəqslər nəticəsində sistemin fazalarında yayılan dalğaların forması, dalğanın sönmə dekrementi və faza sürətləri təyin edilmiş, dispersiyanın xarakterik əyriləri qurulmuşdur. Transendent cəbri tənlik şəklində alınmış dispersiya tənliyi biseksiya və ya parçanın bölünməsi üsulu ilə  $10^{-4}$  dəqiqlikdə iterasiyalar qurmaqla alınmışdır. Məsələ oxa simmetrik hal üçün həll edilmişdir. Alınmış nəticələr nazikdivarlı borunun materialı yüksək möhkəmlikli poladın müxtəlif modifikasiyalarından, kompozit və qeyri-klassik polimer materiallardan ibarət olduğu hallar üçün, ikifazlı maye olaraq isə daşıyıcı maye olaraq su ilə birgə götürülən sferik hava qabarcıqlarından ibarət olduğu hallar üçün hesablanmışdır.

## I FƏSİL

### “MAYE-ÖRTÜK”SİSTEMİNİN HİDROELASTİK SİSTEMİNDƏ DALĞALARIN YAYILMASI MƏSƏLƏSİNİN QOYULUŞU VƏ HƏLLİNİN İCMALI

Bu fəsildə ikifazlı mayelərin xüsusiyyətləri, maye və qabarcığın qarşılıqlı münasibəti, qabarcıqlı mayelərdə əsas fərziyyələr və onların riyazi təsvirinin qısa xülasəsi verilmişdir. Heterogen mühit olan ikifazlı maye və qaz qabarcığından ibarət kontiniumda baş verən hərəkət və proseslərin riyazi modelləşdirilməsinin əsasları göstərilmişdir. Borularda maye – qaz qarışığının axınının xüsusiyyətləri verilmişdir, bu zaman mayenin özlülyünün sabit və təzyiqdən asılı xətti qanunla dəyişməsi hallarına baxılmışdır. İki fazlı axınların daşınması ilə əlaqəli məsələ həll olunaraq, tam tənliklər sistemi alınmışdır. Alınmış tənliklər sistemi həm də ölçüsüz dəyişənlərdə yazılmışdır.

#### **1.1. Maye-qaz sisteminin xüsusiyyəti**

Mayelərdə baş verən kavitasiya prosesi təzyiq düşgüsü və lokal sürətdə baş verən dəyişmələr hesabına əmələ gəlir [72], [103], [114]. Bu zaman proses hidrodinamik və akustik olmaqla iki cür şərh edilir. Mayədə qaynama prosesi, təzyiq düşgüsünün qiyməti doymuş mayedəki təzyiqdən az olduğu halda baş verir. Proses zamanı axının bu hissəsində maye buxarlanır və boşluqlar yaranmağa başlayır ki, həmin boşluqlar da qabarcıq şəklində olur. Yaranmış qabarcıq şəkilli boşluqlar isə hava ilə dolur. Prosesdə əmələ gələn fiziki və kimyəvi effektlərlə əlaqədar olaraq, tədqiqatçı alimlərdə akustik kavitasiya hadisəsinə maraq yaranmışdır. Kavitasiya

hadisəsi zamanı daxilində maye olan bərk cismin səthində mexaniki zədələnmələr müşahidə olunur. Axının həcm dəyişməsi baş verən hissəsində və eyni zamanda kavitasiya yaranan hissədə axının xassəsi, digər hissəsindəki xassədən əsaslı şəkildə fərqlənir. Əgər daha sonra axının hərəkətində təzyiqdə artım baş verərsə, onda yaranmış boşluqlar kəskin çatlama səsləri ilə müşahidə olunaraq, yox olur. Daşıyıcı faza damcılı maye, daşınan isə hava qabarcıqları olduqda, eyni zamanda suda həll olunmuş qazların su ilə birgə daşınması zamanı kavitasiya hadisəsinin əmələ gəlməsi prosesi kifayət qədər asanlaşır. Əgər maye axan kanalın diametri dəyişəndirsə və kanal tədricən genişlənsə, müvafiq olaraq, həmin genişlənən hissədə sürət tədricən azalır və təzyiq isə atmosfer təzyiqinin qiymətinə qədər artır, halbuki, kanalın dar hissəsində axın boyu təzyiq öz kiçik qiymətində qalmaqda davam edir.

Bilindiyi kimi, kapilyar qüvvələrin təsirindən sərbəst düşən su damcıları kürə formasını alır [68], [69]. Praktiki olaraq, göstərilmişdir ki, suyun özlülüyü qazın özlülüyündən dəfələrlə böyükdür və bu baxımdan, qaz qabarcıqlarından ibarət kürəciklərə bərk cisim – bərk kürəciklər kimi baxılır və onlar üçün Stoks qanunu ödəyir. Həmin müntəzəm düşən kürəciklərə təsir edən müqavimət qüvvəsi onların öz çəkilərinə bərabərdir. Kürənin diametrini  $d$ - ilə, kürəciyin düşmə sürətini  $\nu$ - ilə işarə etməklə, yaza bilərik:

$$3\pi\mu_{hava} \nu d = g\rho_{su} \frac{\pi}{6} d^3 \quad (1.1.1)$$

Sonuncu ifadədə  $\mu_{hava}$  - qazın və ya başqa sözlə desək, havanın özlülüyü,  $\rho_{su}$  - daşıyıcı fazanın və ya başqa sözlə desək, baxdığımız hal üçün suyun sıxlığıdır. (1.1.1) tənliyindən sürəti təyin edək:

$$\nu = \frac{\rho_{su} g d^2}{18\mu_{hava}} = \frac{g}{18} \frac{\rho_{su}}{\rho_{hava}} \frac{d^2}{\nu_{hava}} \quad (1.1.2)$$

(1.1.2)-də klassik işarələmələrdən istifadə olunub, beləki,  $v_{hava}$  -havanın kinematik özlülüyü,  $\rho_{hava}$  - qazın və ya havanın sıxlığı işarə olunub. (1.1.2)- düsturu ilə hesablama apararaq sürəti təyin etmək üçün praktikadan məlum xarakterik ölçülərdən istifadə edək:  $\frac{\rho_{su}}{\rho_{hava}} = 800$ ,  $v_{hava} = 0.14 \text{ sm}^2 / \text{san}$ . Deyilənləri nəzərə almaqla sürət üçün:

$$v = 31d^2 \quad (1.1.3)$$

[68], [114]- işlərində göstərildiyi kimi, 0.1mm diametrli damcının düşmə sürəti 0.31 m/san olur. Ancaq burada qeyd etmək lazımdır ki, nisbətən böyük diametrli damcılarda sürətlərini müəyyənləşdirmək üçün Nyuton qanununu tətbiq etmək ehtiyacı yaranır.

$$g\rho_{su} \frac{\pi}{6} d^3 = c\rho_{hava} \frac{v^2}{2} \frac{\pi}{4} d^2$$

Sonuncu ifadədən kürəşəkilli damcının düşmə sürəti alınır:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3c} \frac{\rho_{su}}{\rho_{hava}} gd}, \quad (1.1.4)$$

Sürətin bu ifadəsində  $c$  - əmsalı müqavimət əmsalıdır, qiyməti praktikadan təyin edilir və təcrübə olaraq müəyyən olunmuşdur ki, müqavimət əmsalı təxmini olaraq 0.5 qiyməti ətrafında qiymətlər alır, ancaq sabit deyil, sürətin qiymətindən asılı olaraq dəyişir. Hesab etsək ki,  $c=0.5$  olsa, bu qiymət üçün sürət  $v = 4.6\sqrt{d}$  olar [68]. Qeyd edək ki, (1.1.4)- ifadəsi nisbətən böyük diametrli damcılar, məsələn təqribən 4mm-dən böyük diametrli damcılar üçün doğrudur.



Havada su damcılarının düşmə sürəti üçün tətbiq olunan düsturlardan istifadə edərək, daşıyıcı maye su olduqda, qaz qabarcığının mayədə, yəni suda qalxma sürətini hesablaya bilərik. Bu əlaqə ona görə mümkün olur ki, qaz (hava) qabarcığına təsir edən və onun qalxmasına səbəb olan qüvvənin modulu həmin diametrli su damcısının havadakı çəkisinə bərabərdir. Əvvəldə də qeyd etdiyimiz kimi normal temperatur şəraitində suyun özlülüyü və sıxlığı, müvafiq olaraq, havanın özlülüyü və sıxlığından kifayət qədər böyükdür. Deyilənlər ümumiləşdirilərək, aşağıda kürəciklərin diametrlərinin müxtəlif intervallarında sürətlərin qiymətlərini hesablamaq üçün düsturlar verilmişdir [69], [114]. Bu zaman a) halı üçün Stoks qanunu, b) halı üçün isə Nyuton qanunu doğrudur:

a)  $d \leq 0.16 \text{ mm}$  olduqda,  $\nu = 0.4d^2 \approx 0.5d^2$ ;

b)  $d \geq 1 \text{ mm}$  olduqda,  $\nu = \text{ədəd} \cdot \sqrt{d}$ .

Qeyd edək ki, bu halda kürəciklərin hərəkəti şaquli qalxan hərəkət kimi qəbul olunur. Ancaq məlumdur ki, ümumiyyətlə kiçik kürəciklərin hərəkəti heç də həmişə şaquli xətt üzrə baş vermir, sol və sağ tərəfə sapmalar müşahidə olunur, hətta kürəciklərin vintvari hərəkəti də mümkündür.

## 1.2. Maye və qabarcığın qarşılıqlı münasibəti

Mayədə olan qaz qabarcıqlarının xassələri, qabarcıqların genişlənməsi, rəqsləri və “partlamaları” ilə çox mexaniki xüsusiyyətlərin yaranması son dövrlərdəki nəzəri və eksperimental tədqiqatlarda öz əsaslandırılmasını tapmışdır [115], [127]. Mayədə kiçik qabarcıqların rəqsi məsələsi ikifazlı mühitdə təzyiq düşgüsü nəticəsində mayədə həll olunmuş qazların ayrılması prosesində, xüsusi olaraq mayədə kavitasiya və qaynama hadisələri baş verdikdə və digər hallarda araşdırılır. Ayrılıqda götürülən qabarcığın və sıxılan mayenin, mayədə çoxsaylı qabarcıqlar olduğu hallardakı

hərəkətinin, mayedə akustik dalğaların olduğu hallarda və mayedə güclü zərbə dalğalarının yayılmasına həsr olunan tədqiqatlar aparılmışdır.

Hidrogen buxarı olan qabarcıqların fiziki təcrübələrdə özlərini maye hidrogendə necə aparmaları ultrasəs akustik meydanlar olan hallarda öyrənilmişdir. Hesablamalar nəticəsində məlum olmuşdur ki, kiçik qaz qabarcıqlarının maye fazada qısa müddətli ( $10^{-6} - 10^{-9}$  san) sıxılmasında  $10^4$  tərtibində atmosfer təzyiqi və  $10^4$  selsi tərtibli temperatur yarana bilər.

Atmosfer təzyiqi şəraitində suda  $r < 1\text{sm}$  radiuslu qabarcıqların müvazinət vəziyyəti ətrafında sərbəst rəqslərinin periodu saniyənin milyonda bir və mində bir payları tərtibində olur:

$$\tau \approx [10^{-6} \div 10^{-3}] \text{san}$$

Hesablamalar və təcrübələr göstərir ki, qaz və buxar qabarcıqlarının bərk divar yaxınlığında və ya zərbə dalğası nəticəsində qabarcığın səthi kəskin deformasiya olunur [114]. Nəticədə çox nazik maye şırnaq yaranır, bu şırnaq bərk divara böyük sürətlə təsir edir və boru divarını bəzən dağıda bilər.

$R(t)$  radiuslu qabarcığın hərəkət edən olması şərti daxilində izolə edilmiş sferik qabarcıq halında radial hərəkətin dinamik məsələsi qeyri-məhdud mayedə  $P(t)$  və  $T(t)$  zamanının funksiyası kimi verildikdə, maye isə sonsuzluqda qabarcıqdan uzaqda müvazinətdə olarsa, qaz və mayenin müxtəlif sıxlığa malik olduğu halda sfera formalı qaz qabarcığın səthi maye ilə qabarcıq arasında kəsilmə səthi aşağıdakı şərtlərdən təşkil olunur [71]:

1. Kütlə balansı-maddə daşınması tənliyi.
2. Hərəkət miqdarı (impuls) tənliyi.
3. Reoloji qanun (Navye-Stoks və digər qanunlarda ola bilər).

$$\tau_{rr \text{ maye}} = -\frac{4\mu}{R} v_{\text{maye}}(R) \text{ -sferanın səthində özlü gərginliyin radial komponentidir.}$$

4. Enerji tənliyi ( maye və qaz tərəfindən istilik axınları nəzərə alınmaqla).

1, 2 və 4-cü bəndlərin tənlikləri kəsilmə səthində faza çevirmələri olduqda tətbiq olunurlar:

$$U_{qaz} - U_{maye} = L$$

Burada  $U_{qaz}, U_{maye}$  -müvafiq olaraq qaz və mayədə daxili enerjinin sıxlığı,  $L$  - faza keçidlərindəki enerji sıxlığıdır (vahid kütləyə düşən enerji, vahid həcmdəki enerji və s.)

Kəsilmə səthində mümkün olan aşağıdakı xüsusi hallara baxaq:

I. Kütləsi sabit qalan qabarcığın sərhədində verilən şərt: Buxarlanma, kondensasiya və diffuziya qabarcığın səthində baş vermədikdə, qabarcıqda qazın kütləsi:

$$m = m_0 = const, f_n = 0$$

Bu zaman 1, 2 və 4-cü bəndlərin tənlikləri sadələşir:

$$v_{maye} = v_{qaz} = \dot{R}, P_{maye} = P_{qaz} - \frac{2\sigma}{R} + \tau_{rr\ maye}$$

Vahid zamanda qaza verilən istilik miqdarı bərabərliyin sol tərəfində və mayeyə verilən istilik miqdarı Furiye qanununa tabe olmaqla bərabərliyin sağ tərəfində yazılır.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dq_{qaz}}{dt} 4\pi R^2 = (k_{maye} \frac{\partial T_{maye}}{\partial r} - \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_{maye}}{dt}) 4\pi R^2$$

Qabarcıq daxilində qazın xarakteristikalarının  $\sigma$ - səthi gərilmə,  $\tau_{rr}$  - özlü gərginliyin qeyri-müntəzəm paylanması nəzərə alınmamasında nəzəri tədqiqatlarda qazların ətalət xassələrinin, onun kinetik enerjisinin və qabarcıq daxili

sıxlıq və temperatur paylanması qeyri müntəzəmliyinin nəzərə alınmadığını müşahidə edilir. Bu qabarcığın radiusunun çox kiçik olması, qabarcıq daxilində səs yayılma sürətinin və zərbə dalğalarının sürətinin mayenin sürətindən, qazların sürəti və qabarcığın ölçüsünün dəyişmə sürətindən dəfələrlə böyük olması ilə əlaqədar olur. Bundan əlavə demək olar ki, həmişə qabarcıq daxilindəki qazın və ya buxarın sıxlığı mayenin sıxlığından üç tərtib kiçik olur. Əgər qabarcıq daxilində qazın proseslərdə dönmə effekti əhəmiyyət daşıyırsa, onda qazın qabarcığın radiusu boyu xarakteristikalarının paylanmasıdakı qeyri - müntəzəmlik nəzərə alınmalıdır.

Odur ki, bir çox proseslərdə qabarcıq daxilində qazın  $p_q$  - təzyiqinin,  $\rho_q$  - sıxlığının və  $T_q$  - mütləq temperaturunun yalnız zamandan asılı olduğu və onların bir-biri ilə hal tənliyi ilə əlaqəli olduğu qəbul edilir [116]:

$$p_q = f(\rho_q, T_q, X_1, X_2, \dots),$$

$$U_{mq} = \rho_q V_q U_q(\rho_q, T_q, X_1, X_2, \dots).$$

Burada  $U_{mq}$  -qabarcıq daxilindəki qazın tam enerjisi,  $V_q$  - qabarcığın həcmidir. Əgər  $X_i = X_i(\rho_q, T_q)$  olarsa, qabarcıq daxilindəki qazın termodinamik halı  $p_q(t)$ ,  $T_q(t)$ ,  $\rho_q(t)$  və  $R(t)$  zamanın dörd funksiyası ilə ifadə olunur.

Qabarcıq daxilində qazın xarakteristikaları yalnız qabarcığın radiusundan asılı olduğu hal:

II.  $U_q$  - kəmiyyəti yalnız  $p_q$  və  $\rho_q$ -lərdən asılıdır, qeyd olunmuş qabarcıq daxilində  $m_0$ -kütləli qazın təzyiqi və sıxlığının isə yalnız zamandan asılı olduğunu qəbul etsək, qabarcıq daxilindəki bütün qaz kütləsinə yönələn istilik seli tənliyi:

$$m_0 \frac{dU_q(\rho_q, p_q)}{dt} = -m_0 p_q \frac{d\left(\frac{1}{\rho_q}\right)}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (1.2.1)$$

Burada,

$$\rho_q = \frac{m_0}{\frac{3}{4}\pi R^3}.$$

Əgər prosesin adiabat olduğunu qəbul etsək,  $\frac{dQ}{dt} = 0$  olar və

$$P_q = f(\rho_q) = P_q(R)$$

olar.

Adiabat olmadığı yəni  $\frac{dQ}{dt}$ -verildiyi halda,  $p_q(R)$ - kəmiyyətini (1.2.1)-dən təyin etmək olar. İzotermik halında (qabarcıq daxilindəki qazda izotermikliyi qəbul etsək) hal tənliyindən və (1.2.1) bərabərliyindən  $\frac{dQ}{dt}$ -müvafiq istilik artımı olmalıdır. Bu üsulla qabarcıq daxili politrop proses analiz oluna bilər. Ümumi halda isə  $p_q(R)$ -i təyin edən (1.2.1)-tənliyini əvvəlcədən  $\frac{dQ}{dt}$ -istilik selini təyin etməyə imkan verən digər münasibətlərlə birgə həll etmək lazımdır. Bütün baxılan hallarda  $R(t)$ -funksiyasını təyin etmək üçün mayenin hərəkət tənliklərindən istifadə edilməlidir. Qabarcıq daxilindəki qazın sıxlığının yalnız zamandan asılı olduğu hal [128]:

III. Qabarcıq daxilindəki qazın  $m$  kütləsi dəyişən olduqda və qabarcıq daxilində  $\rho_q$  -nün yalnız zamandan asılı olmasını fərz etsək,  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_q$  və kütlə balans tənliyi:

$$v_q = -\frac{R}{3} \frac{\dot{\rho}_q}{\rho_q}, \text{ burada } \dot{\rho}_q = \frac{d\rho_q}{dt}$$

$$v_{maye} = \left(1 - \frac{\rho_q}{\rho_{maye}}\right) \dot{R} + \frac{\rho_q}{\rho_{maye}} \left(v_q + \dot{f}_n\right)$$

Bu bərabərliklərdən  $\rho_q = const$  şərtində, yəni  $\dot{\rho}_q = 0$  olduqda,  $v_q = 0$  alınır. İkinci münasibətdən isə sonlu  $j_n$  - lərdə və çox kiçik  $\frac{\rho_q}{\rho_{maye}} \ll 1$  halında təqribi olaraq  $v_{maye} = \dot{R}$  - bərabərliyindən istifadə etmək olar.

### 1.3. Qabarcıqlı mayelərdə əsas fərziyyələr və riyazi təsvirin xüsusiyyətləri

Heterogen mühit olan ikifazlı maye və qaz qabarcığından ibarət kontiniumda baş verən hərəkət və proseslərin riyazi modelləşdirilməsi ikisi əsas olmaqla aşağıdakı fərziyyələrə əsaslanır [68], [95], [114] :

- Qabarcıqların diametri molekulyar-kinetik ölçülərdən dəfələrlə böyükdür.
- Qabarcıqların diametri qarışıqların və ya fazaların makroskopik parametrlərinin əhəmiyyətli dərəcədə dəyişdiyi məsafədən kiçikdir. Maye daxilindəki qabarcıqların ölçüsü qarışıqda yaranan dalğaların özünəməxsus uzunluqlarından nəzərə çarpacaq nisbətə kiçik olur.

Birinci fərziyyə qabarcıq daxilində proseslərin təsviri üçün bütöv mühit mexanikasının klassik müddəə və tənliklərindən yararlanmağa kömək olur. Növbəti fərziyyə heterogen mühitlərdə dalğanın yayılmasını və digər makroskopik hadisələri ifadə etməyə zəmin yaradır. Ümumi halda heterogen mühitlər, o cümlədən, qabarcıqlı mayələrin hidrodinamika məsələləri dispers faza ilə mayenin sürətlərinin fərqi yaradığı dinamik effektlər nəzərə alınan çoxsürətli modellə təsvir olunur.

- Hər bir elementar həcmdə sferik formada eyni radiuslu olan qabarcıqlara malikdir və mövcud qabarcıqların həcmi konsentrasiyası  $\alpha_2$  nəzərə çarpacaq qədər böyük qiymətə malik deyil ( $\alpha_2 \ll 1$ )

- Dispers hissəcik olan qabarcıqların xaotik və daxili (fırlanma və deformasiyasının) enerjisi nəzərə alınmır.
- Maye daxilindəki qabarcıqların öz-özləri ilə qarşılıqlı təsiri və toqquşmaları nəzərə alınmır.
- Qabarcıqların bir-biri ilə yapışması yəni koagulyasiyası, dağılması və yeni qabarcıq formalarının yaranması hadisəsinin mümkünlüyü nəzərə alınmır.

Qeyd olunan fərziyyələrlə yanaşı, daxilində qabarcıq olan mayeləri xarakterizə edən zaman adətən növbəti ehtimallarda nəzərə alınır [80]:

- Mayenin özlülüyünün istilikkeçirmə xüsusiyyəti yalnız mərhələlər arası olan münasibət zamanı mövcud olur, impulsa və enerjiyə dəyişilmə makroskopik hadisəsi zamanı meydana çıxmır.

- Qazın sıxlığı  $\rho_2^0$  mayenin sıxlığından  $\rho_1^0$  nəzərə çarpacaq qədər kiçik olur.

$$\rho_2^0 \ll \rho_1^0$$

$\rho_1^0$  və  $\rho_2^0$  - mayenin və qabarcıqın maddələrinin sıxlığı,  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  - onların həcmi konsentrasiyası,  $n$  - qabarcıqlı mayeni vahid həcmində qabarcıqların sayı və ya ədədi konsentrasiyasıdır.

$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2$$

Fazaların gətirilmiş sıxlıqlar  $\rho_i$  qarışığın vahid həcmində fazaların kütlələrini xarakterizə etməklə cəm halında qabarcıqlı mayenin  $\rho$  sıxlığını müəyyən edir [89], [69], [91], [92], [116]:

$$\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2$$

Maye fazanın orta kütləsi sabitdir.

$$T_1 = T_0 = \text{const}(\rho_2 c_2 \ll \rho_1 c_1, \rho_2 \ll \rho_1 c_1 \approx c_2).$$

Burada  $\rho_i$  ( $i=1,2$ )- fazanı xarakterizə edən orta konsentrasiya,  $\alpha_i$  ( $i=1,2$ ) isə fazanın həcm konsentrasiyasıdır.  $c_i$ - stabil təzyiqdə,  $i$ - fazaya məxsus məxsusi istilik tutumudur.

#### 1.4. Elastiki silindrik boruların hərəkət tənlikləri

Nazikdivarlı sonsuz silindrin örtüyünün orta radiusunu  $R$ , qalınlığını  $h$  işarə etsək,  $x, \theta, r$  silindrik koordinatlarda gərginlik-deformasiya vəziyyətini araşdırdıqda  $\{x, y, z\}$  yerli koordinatların bir neçə nöqtələri ilə əlaqələndirmək üçün  $Ox$  oxunu silindrin oxu boyunca,  $Oy$  oxunu toxunan istiqamətdə,  $Oz$  oxunu isə silindrin daxili normalı istiqamətində yönəldib, sonsuz kiçik

$$\{(x, x + dx), (\theta, \theta + d\theta), (R + z, R + z + dz)\}$$

elementini seçək. Kirxof-Lyav hipotezasına əsasən örtüyün momentlər nəzəriyyəsinə əsaslanan müvazinətin diferensial tənliyi, statik halda [56], [63], [76], [79], [107], [126] aşağıdakı formada olur:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} = -q_\theta \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_n \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Qüvvə və momentlərlə gərginliklər aşağıdakı münasibətlər aşağıdakı formada olur:



$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz - \text{oxboyu qüvvə},$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz - \text{dairəvi qüvvə},$$

$$S_{\alpha x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha x} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \text{ və } S_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} dz - \text{toxunan qüvvələr},$$

$$M_1 = M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz - \text{uzununa əyilmə momenti},$$

$$M_2 = M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz - \text{dairəvi əyilmə momenti},$$

$$M_{\alpha x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha x} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha x} z dz \text{ və } M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} z dz - \text{burulma momentləri}$$

$$H = M_{\alpha x} = M_{x\theta};$$

$(q_x, q_\theta, q_n)$ - örtüyün daxili səthində təsir edən xarici səthi qüvvələrin gərginlik vektorunun komponentləridir.

Örtüyün hərəkətinin dinamik tənliyini müvazinət tənliyinin sağ tərəfinə inersiya hədlərini əlavə etməklə alarıq.

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Burada,  $u_x, u_\theta, u_r$ - yerdəyişmə vektorunun komponentləri,  $\rho$ - örtük materialının sıxlığıdır. İndi isə örtüyün dinamik tənliklərini yerdəyişmələrdə yazaq. Nəzərə alsaq ki, nazikdivarlı örtüyün radial istiqamətdə gərginlikləri Kirhof- Lyav hipotezinə əsasən sıfıra bərabər olur, bu zaman ümumiləşmiş Huk qanunu aşağıdakı formada yazılır:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_\theta) \\ \sigma_{x\theta} = \sigma_{\theta x} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x\theta} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

burada borunun materialı üçün  $E$  - Yunq modulu,  $\nu$  - Puasson əmsalındır.

Deformasiyanın yerdəyişmələrlə ifadələri Koşi münasibətləri olaraq aşağıdakı formada olur:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{R} \\ \varepsilon_{\theta x} = \varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Ümumiləşmiş Huk qanununun (1.4.3) bərabərliklərində deformasiya komponentlərinin (1.4.4) ifadələrini nəzərə alınmaqla qüvvə və momentin gərginliklərlə olan inteqral münasibətlərindən onların yerdəyişmələrlə ifadəsi müvafiq şəkildə olur:

$$\begin{cases} N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R} u_r \right) \\ N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R} u_r \right) \\ S_1 = S_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) \\ S_2 = S_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (1.4.5)$$

$$\begin{cases} M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ H = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Məsələnin riyazi həllində düsturların sadə olması məqsədilə ölçüsüz kəmiyyətlər daxil edək:

$x^* = \frac{x}{R}, r^* = \frac{r}{R}$ , bu halda  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}$ . Sonrakı ifadələrdə ölçüsüz

kəmiyyətin mahiyyəti saxlanılmaqla “\*” işarəsi uyğun koordinatlarda qeyd edilməyəcək. Bu zaman (1.4.2)- tənlikləri yerdəyişmələrdə aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{cases} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_x + \frac{1+\nu}{2R} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} u_\theta + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} u_r \right) = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} u_x + \left( \frac{1-\nu}{2} \left( 1 + 4 \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_\theta + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{h^2}{12R^2} (2-\nu) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) u_r \right) = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( -\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} u_x + \left( -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12R^2} (2-\nu) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{h^2}{12R^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) u_\theta + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{R^2} - \frac{h^2}{12R^2} \left( R^2 \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) \right) u_r \right) = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.4.6)$$

(1.4.6)-nın hər iki tərəfini  $R^2$ -na vurub,  $\frac{Eh}{1-\nu^2}$  ifadəsinə bölək və örtüyün nisbi

qalınlığı ilə əlaqəli olan aşağıdakı parametri daxil etməklə

$$a = \frac{h^2}{12R^2} \quad (1.4.7)$$

örtüyün hərəkətinin diferensial tənliyini alırıq:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_x + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} u_\theta + \nu \frac{\partial}{\partial x} u_r = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 q_x + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
 & \left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} u_x + \left( \frac{1-\nu}{2} (1+4a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_\theta + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - a \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) u_r = -\frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 q_\theta + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right. \\
 & \left. - \nu \frac{\partial}{\partial x} u_x + \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + a \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) u_\theta + \right. \\
 & \left. + \left( -1 - a \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) \right) u_r = -\frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 q_n + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right.
 \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

(1.4.8)- sistemini matris formasında yazıq:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \begin{pmatrix} -q_x \\ -q_\theta \\ -q_n \end{pmatrix} + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \tag{1.4.9}$$

burada,

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x},$$

$$L_{13} = -L_{31} = \nu \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2} (1+4a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$L_{23} = -L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - a \frac{\partial^3}{\partial \theta^3},$$

$$L_{33} = -1 - a \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) = -1 - a \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2.$$

Daxili səthi qüvvələrin gərginlikləri olmadığı halda örtüyün sərbəst rəqslərinin matris formada tənliyi silindrik örtüyün sərbəst rəqslərini ifadə edir:

$$\left( L - \frac{1-v^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.10)$$

Örtüyün rəqsləri müxtəlif növ rəqslərin yığımından ibarətdir və bu toplu  $m$  dairəvi dalğa ədədi ilə xarakterizə olunur. Belə ki,  $m=0$  olduqda rəqslər oxasimmetrik,  $m=1$  olduqda əyilmə formasında,  $m=2,3,\dots$  olduqda qeyri-oxasimmetrik formada olur. Beləliklə, yerdəyişmə vektorları aşağıdakı münasibətlərlə ifadə olunur [61], [62]:

$$\vec{u} = \sum_m \vec{u}_m(x, \theta, t) \quad (1.4.11)$$

Hər bir seçilmiş  $m$  ədədi üçün dinamik diferensial tənliklərinin xətti xarakterinə əsasən, (1.4.6) -tənliklər sisteminin həlli aşağıdakı formada axtarılır:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_m e^{kx-i\omega t} \cos(m\theta) \\ V_m e^{kx-i\omega t} \sin(m\theta) \\ W_m e^{kx-i\omega t} \cos(m\theta) \end{pmatrix} \quad (1.4.12)$$

burada,  $\omega$  rəqslərin  $\Omega$  tezliyi ilə  $\omega^2 = \frac{1-v^2}{E} R^2 \rho \Omega^2$  ifadəsi ilə əlaqəli olan gətirilmiş qiyməti,  $k = \lambda R$  - oxboyu gətirilmiş dalğa ədədi,  $\lambda$  - oxboyu dalğa ədədi,  $m$  - dairəvi dalğa ədədidir.

(1.4.6) -tənliklər sisteminin həllinin (1.4.12) şəklində seçilməsi göstərir ki, kompleks  $k = k(\omega)$  ədədinin riyazi ifadəsinin xəyali hissəsinin əmsalı yayılan dalğaları, həqiqi qiyməti isə sönən dalğaları xarakterizə edir. Kompleks ifadənin özü isə qeyri- bircins dalğaları təsvir edir. Sonsuz örtükdə hər zaman əks istiqamətlərdə yayılan (sönən) iki dalğa mövcud olur.  $k$  dalğa ədədinin sırf xəyali qiymətinin müsbət olması,  $Ox$  oxu istiqamətində dalğanın yayılmasını, sırf həqiqi qiymətinin mənfi olması, həmin istiqamətdə oxboyu koordinata görə rəqslər olmadan, dalğanın sönməsini ifadə edir. Kompleks  $k$  ədədinin müsbət xəyali və mənfi həqiqi hissələrinin olması  $Ox$  oxu istiqamətində dalğanın sönməsini təsvir edir .

(1.4.10)-tənliyində (1.4.12)-ni nəzərə alsaq, birinci və üçüncü tənlikləri  $e^{kx-i\alpha x} \cos(m\theta)$ ; ikinci tənliyi  $e^{kx-i\alpha x} \sin(m\theta)$  həddinə bölməklə, (1.4.10) tənliyi hər bir qeyd olunmuş  $m = 0, 1, 2, \dots$  üçün  $U_m, V_m, W_m$  məchullarına görə xətti bircins tənliklər sisteminə çevriləcək. Bu sistemin qeyri trivial həllinin olması üçün onun əmsallarından düzəlmiş determinant sifıra bərabər olmalıdır, bu isə öz növbəsində  $k = k(\omega)$  ədədinin müəyyən qiymətlərində mümkündür. Beləliklə, sözü gedən determinantı sifra bərabərləşdirməklə, dispersiya tənliyini almış olarıq. Həmin tənlik:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2}m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2}km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2}km & \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 - (1+a)m^2 + \omega^2 & -m + a(2-\nu)k^2m - am^3 \\ -\nu k & -m + a(2-\nu)k^2m - am^3 & -1 - a(k^2 - m^2)^2 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.13)$$

formasında olur.

Determinantın sifıra bərabər olması nəticəsində dispersiya tənliyi  $k$ -ya görə səkkiz dərəcəli və ya  $\omega$ -ya görə altı dərəcəli çoxhəddinin sifıra bərabərliyinə gətirilir.

$$a_8 k^8 + a_6(\omega)k^6 + a_4(\omega)k^4 + a_2(\omega)k^2 + a_0(\omega) = 0 \quad (1.4.14)$$

$$\omega^6 + b_4(k)\omega^4 + b_2(k)\omega^2 + b_0(k) = 0 \quad (1.4.15)$$

Momentsiz və yarım momentli nəzəriyyələr. Muştari sadələşməsi və Muştari-Vlasov sadələşmə halları.

Örtüklərin momentsiz hal üçün olan nəzəriyyəsini müvazinət tənliklərində istifadə etdikdə [34], [45], [57]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial x} = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial N_\theta}{R} = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Bu halda  $L$  operatorunun matrisi aşağıdakı formada olur:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} & \nu \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\nu \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial \theta} & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4.17)$$

Həmçinin bu halda dispersiya tənliyi aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} k^2 - m^2 + \omega^2 & -m \\ -\nu k & -m & -1 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.18)$$

Sonuncu tənlik momentli hal üçün olan nəzəriyyənin dispersiya tənliyində  $a=0$  olduğunu nəzərə alındıqda alınır. Dispersiya tənliyi  $k$ -ya görə dörd dərəcəli və ya  $\omega$  görə altı dərəcəli çoxhədlinin sıfıra bərabərliyinə gətirilir.

$$a_4(\omega)k^4 + a_2(\omega)k^2 + a_0(\omega) = 0 \quad (1.4.19)$$

$$\omega^6 + b_4(k)\omega^4 + b_2(k)\omega^2 + b_0(k) = 0 \quad (1.4.20)$$

Yarımmomentli hal üçün olan nəzəriyyəni dinamik müvazinət tənliyində nəzərə alıqda oxboyu əyilmə momenti  $M_1$ və burulma momenti  $H$  nəzərdən atılır. Bu zaman fırlanma parametrlər olan  $\tau$  kəmiyyəti də sıfır olaraq qəbul olunur. Müvafiq olaraq, bu halda

$$S = S_{x\theta} = S_{\alpha} = \frac{Eh}{(1+\nu)} \varepsilon_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \quad (1.4.21)$$

Qüvvə və moment üçün dinamik müvazinət şərti aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Dispersiya tənliyi aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & vk \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} k^2 - (1+a)m^2 + \omega^2 & -m + vak^2 m - am^3 \\ -vk & -m - am^3 & -1 + avk^2 m^2 - am^4 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.23)$$

burada  $a = \frac{h^2}{12R^2}$



Dispersiya tənliyi  $k$ -ya və ya  $\omega$ -ya görə altı dərəcəli çoxhədlinin sıfıra bərabərliyinə gətirilir.

$$a_6(\omega)k^6 + a_4(\omega)k^4 + a_2(\omega)k^2 + a_0(\omega) = 0 \quad (1.4.24)$$

$$\omega^6 + b_4(k)\omega^4 + b_2(k)\omega^2 + b_0(k) = 0 \quad (1.4.25)$$

Örtüklərin yarımмомentsiz nəzəriyyəsində [79] yarımмомentli hal çərçivəsində Puasson əmsalının  $\nu = 0$  olduğu nəzərdə tutulur. Dispersiya tənliyi  $k$ -ya görə dörd dərəcəli və ya  $\omega$  görə altı dərəcəli çoxhədlinin sıfıra bərabərliyinə gətirilir.

Muštari fərziyyəsinə görə [57] və [79] hesab olunur ki, moment gərginlikləri qüvvə gərginliklərinə nəzərən kiçik sıraya malikdirsə və ya sıfıra bərabərdirsə,  $u_\theta$  kəmiyyətini əyilmə və burulma momentinin ifadələrində nəzərə almamaq olar. Bu qaydaya əsasən aşağıdakı münasibətlər alınır:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \\ M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \\ H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} \right) \end{cases} \quad (1.4.26)$$

Bu halda dispersiya tənliyi aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} (1+2a)k^2 - m^2 + \omega^2 & -m + a(2-\nu)k^2 m - am^3 \\ -\nu k & -m & -1 - ak^4 + 2ak^2 m^2 - am^4 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.27)$$

Dalğaların silindrik örtüklərdə yayılması məsələsinə aid momentlər nəzəriyyəsinin sadələşməsi Donella [44], Muştari [57] və Vlasovun [34] araşdırmalarında əks olunmuşdur.

Bu nəzəriyyənin aşağıda göstərilən L operatorunun mastrisində

$$\begin{cases} L_{23} = -L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - a \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}, \\ L_{33} = -1 - a \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) = -1 - a \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \end{cases}$$

nəzərə alsaq,  $a$  kəmiyyəti  $L_{33}$  elementindən başqa bütün hallarda sıfıra bərabər olur.

Bu zaman dispersiya tənliyi aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & vk \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} k^2 - m^2 + \omega^2 & -m \\ -vk & -m & -1 - a(k^2 - m^2)^2 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.28)$$

Dispersiya tənliyi  $k$ -ya görə səkkiz dərəcəli və ya  $\omega$  görə altı dərəcəli çoxhədlinin sıfıra bərabərliyinə gətirilir.

Momentli hal ilə müqayisəli örtüyün rəqslərinin müxtəlif rejimlərində dispersiya ayrılmasına təsiri analiz edilərkən, müəyyən olunmuşdur ki, oxa simmetrik və əyilmə rəqsləri rejimində dalğanın yayılma tezliyinin təyini üçün momentsiz və yarımmomentli nəzəriyyəni tətbiq etmək olar. Müxtəlif tip dalğaların (yayılan, sönən, qeyri- bircins) qarşılıqlı keçidinin analizi zamanı momentsiz və ya yarımmomentli nəzəriyyənin tətbiqi işə yaramır. Bu hal üçün Donel-Muştari-Vlasov nəzəriyyəsi daha məqsədəuyğundur. Rəqslərin oxasimmetrik və əyilmə rejimlərinə aid misallarında yayılan dalğaların xarakterinin modal əmsalların köməyi ilə öyrənilməsi metodikasında hansı yerdəyişmənin (oxboyu, dairəvi, radial) üstünlük təşkil etməsi və tezlikdən asılı olaraq onların necə dəyişməsinin analizi müşahidə olunur.

Maye ilə dolu olan nazikdivarlı dairəvi silindrik izotrop örtüyün kiçik rəqsləri halının qısa şərhini verək.

Sıxılmayan ideal maye ilə doldurulmuş izotrop örtüyün hərəkətinin diferensial tənliyi və dispersiya tənliyini izah edək. Hesab edək ki, örtük sıxılmayan ideal maye ilə doldurulub, onun burulğansız hərəkəti silindrik koordinatlarda sürət potensialı üçün olan tənliklə ifadə olunur [26], [37], [59]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.4.29)$$

Maye-örtük sərhəddində kontakt səthində (keçirilməzlik şərti) aşağıdakı kimi olur:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.4.30)$$

(1.4.9) – sistem tənliyində mayenin mövcudluğunu  $q_n$  ifadəsində nəzərə alıb,  $q_x$  və  $q_\theta$  hədlərini sıfıra bərabər edək. Bu məsələnin həllini və ölçüsüz koordinatlara keçid düsturuna nəzərdən keçirək.

(1.4.29)- tənliyinin həllini aşağıdakı formada axtaraq:

$$\phi(x, \theta, r, t) = \sum_m \Phi_m(x, \theta, r, t) = \sum_m \phi_m(r) e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta)$$

burada  $x$ - ölçülü oxboyu koordinatı,  $\lambda$ -oxboyu dalğa ədədi,  $\Omega$ - tezlikdir. Bu cür yazılış hər bir  $m$  üçün müstəqil həllin varlığını axtarmağa zəmin yaradır. Yəni, hər bir  $m$  üçün məsələnin həlli yazılır:

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.4.31)$$

$\Phi_m(x, \theta, r, t) = \phi_m(r)e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta)$  ifadəsini (1.4.31)-tənliyində yazıb, hər iki tərəfi  $e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta)$  ifadəsinə bölsək,  $\phi_m(r)$  ifadəsi üçün Bessel funksiyasına gətirilir [54], [131].

$$\phi_m''(r) + \frac{1}{r}\phi_m'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\phi_m(r) = 0$$

Onun həlli aşağıdakı formada olur:

$$\phi_m(r) = C_{1m}J_m(r\lambda) + C_{2m}Y_m(r\lambda)$$

burada  $J_m(r\lambda)$  və  $Y_m(r\lambda)$  Bessel funksiyaları,  $C_{1m}$  və  $C_{2m}$  -sabitlərdir. Potensial sürətinin məhdudluq şərtindən  $r \rightarrow 0$  şərtində  $C_{2m} = 0$  olur. Bu zaman alırıq:

$$\phi_m(r) = C_{1m}J_m(r\lambda)$$

Keçirməməzlik şərtinə əsasən yazı bilərik:

$$\left. \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w_m}{\partial t}$$

burada,  $w(x, \theta, t) = W_m e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta)$ . Bu işarələmədən növbəti ifadə alınır:

$$\phi_m'(r) \Big|_{r=R} = -i\Omega W_m$$

buradan  $C_{m1} \frac{\partial J_m(r\lambda)}{\partial r} \Big|_{r=R} = -i\Omega W_m$  və ya

$$C_{m1} = \frac{-i\Omega W_m}{\frac{\partial J_m(r\lambda)}{\partial r} \Big|_{r=R}}$$

Müvafiq olaraq,

$$\phi_m(R) = \frac{-i\Omega W_m J_m(R\lambda)}{\left. \frac{\partial J_m(r\lambda)}{\partial r} \right|_{r=R}}$$

Örtüyün divarının kontakt səthində mayeyə təzyiqi aşağıdakı formada olur [48]:

$$q_m = -\phi_m(R) \rho_{fl} \frac{\partial}{\partial t} (e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta)) = \Omega^2 \rho_{fl} \frac{W_m J_m(R\lambda)}{\left. \frac{\partial J_m(r\lambda)}{\partial r} \right|_{r=R}} (e^{\lambda x - i\Omega t} \cos(m\theta))$$

burada  $\rho_{fl}$ -mayenin sıxlığıdır.

Ölçüsüz kəmiyyətlərə keçərkən,  $\omega^2 = \frac{1-v^2}{E} R^2 \rho \Omega^2$ -ifadəsində  $\Omega$ -tezliyi ilə əlaqəli

$\omega$  tezliyini daxil edən zaman, daxilində maye olan örtüyün dinamik müvazinət şərti aşağıdakı kimi olar:

$$\tilde{L} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = 0$$

burada, diferensial operatorlar uyğun olaraq

$$\begin{cases} \tilde{L}_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \tilde{L}_{12} = \tilde{L}_{21} = \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ \tilde{L}_{13} = \tilde{L}_{31} = v \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}_{22} = \frac{1-\nu}{2}(1+4a)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+a)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \tilde{L}_{23} = \tilde{L}_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - a\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ \tilde{L}_{33} = 1 + a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 - \omega^2 \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_m(k)}{\frac{\partial J_m(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

Müvafiq olaraq yerdəyişmə vektorunun amplitudunun matrisi belə yazılır:

$$L^* \vec{U}_m = 0$$

burada,  $\vec{U}_m = \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix}$

$$\left( \begin{array}{ccc} k^2 - \frac{1-\nu}{2}m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2}km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2}km & \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 - (1+a)m^2 + \omega^2 & -m + a(2-\nu)k^2m - am^3 \\ -\nu k & -m + a(2-\nu)k^2m - am^3 & -1 - a(k^2 - m^2)^2 + \omega^2 \left( 1 + \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_m(k)}{\frac{\partial J_m(rk)}{\partial r} \Big|_{r=1}} \right) \end{array} \right) = 0$$

Sonuncu ifadədən  $L^*$ -operatorunun matrisinin determinantını sıfıra bərabər etsək,  $k = k(\omega)$ -ifadəsinin təyin olunması üçün dispersiya tənliyini alarıq. Boş örtüyün dispersiya tənliyini sonuncu tənlikdə  $\rho_{fl} = 0$  yazmaqla alınır.

$$f_m(k) = \frac{J_m(k)}{\frac{\partial J_m(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1}} = \frac{J_m(k)}{mJ_m(k) - kJ_{m+1}(k)}$$

Matrisinin determinantını sıfıra bərabər etməklə, dispersiya tənliyi alırıq:

$$a_8 k^8 + a_6(\omega)k^6 + a_4(\omega)k^4 + a_2(\omega)k^2 + a_0(\omega) + (b_4(\omega)k^4 + b_2(\omega)k^2 + b_0(\omega)) \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} f_m(k) = 0$$

Bu tənlik artıq mayenin mövcudluğu faktına əsasən,  $k$ -ya görə yazılmış çoxhədlinin sıfıra bərabər olmasına gətirilmir [96]. Qeyd edək ki, maye olmadığı halda, yəni  $\rho_{fl} = 0$  qəbul etdiyimiz zaman dispersiya tənliyi  $k$ -ya görə çoxhədlinin sıfıra bərabərliyinə gətirilirdi.

$m = 0$  olduqda  $L^*$  operatorunun matrisi aşağıdakı kimi olur:

$$L^* = \begin{pmatrix} k^2 + \omega^2 & 0 & vk \\ 0 & \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 + \omega^2 & 0 \\ -vk & 0 & -1 - ak^4 - \omega^2 + \omega^2 \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_0(k)}{\left. \frac{\partial J_0(\tilde{r}k)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1}} \end{pmatrix} = 0$$

Matrisini hesablayan zaman

$$\det L^* = \left( \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 + \omega^2 \right) \begin{pmatrix} k^2 + \omega^2 & vk \\ vk & ak^4 + 1 - \omega^2 - \omega^2 \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_0(k)}{kJ_1(k)} \end{pmatrix} \text{onu sıfıra}$$

bərabərləşdirsək, dispersiya tənliyini aşağıdakı sistem kimi alırıq:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 + \omega^2 = 0 \\ ak^6 + a\omega^2k^4 + (1-\omega^2-\nu^2)k^2 + \omega^2 - \omega^4 + (k^2\omega^2 + \omega^4) \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_0(k)}{kJ_1(k)} = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.32)$$

Bunlardan birincisinin həlli, örtükdə maye olmadığı hal ilə eyni qiymət alan tamamilə xəyali iki kök verir. Bu isə o deməkdir ki,  $m=0$ -da  $\omega=0$  qiymətindən başlayaraq, əks istiqamətlərdə yayılan iki dalğa, örtükdə mayenin olub olmamasından asılı deyil və bu dalğalar sırf dairəvi yerdəyişmələri ilə xarakterizə olunur.

Mayenin bu burulma dalğalarına təsirinin olmaması, onunla izah olunur ki, biz özlü yox ideal mayeni öyrənirik, hansı ki, yalnız radial koordinat boyu örtüklə qarşılıqlı təsirdə olur.

(1.4.32)-nin ikinci tənliyinin həlli uzununa-radial yerdəyişmələri ilə xarakterizə olunan dalğalar üçün dalğa ədədlərini verir. Mayenin olmadığı halda ikinci tənliyin sol tərəfi ( $\rho_{fl}=0$ )  $k$ -ya görə 6-cı dərəcədə çoxhədlidir.

### 1.5. Momentli nəzəriyyədə ortotrop örtük üçün dispersiya tənliyi

Ortotrop silindrik örtükdə dalğaların yayılmasının öyrənilməsində əsas fərq ümumiləşdirilmiş Huk qanununun aşağıdakı formaya malik olmasıdır [60], [98]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\nu_{12}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1.5.1)$$



Burada,  $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_\theta, \sigma_{12} = \sigma_{x\theta}, E_1 = E_x$  və  $E_2 = E_\theta$ - ortotropiya istiqamətində Yunq modulu,  $\nu_{21}$  və  $\nu_{12}$ - Puasson əmsalı ( Puasson əmsalında birinci indeks normalın səth boyu istiqamətini yəni hansı istiqamətdə dartılma baş verir, ikinci indeks isə hansı istiqamətdə sıxılmanın baş verdiyini göstərir),  $G$  – sürüşmə moduludur.

Bu zaman aşağıdakı münasibət nəzərə alınır:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad (1.5.2)$$

(1.5.1)- ifadələri aşağıdakı formanı alır:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \left( \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \left( -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} \right) \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Sürüşmə modulunu aşağıdakı formada götürmək olar:

$$G = \frac{E_1 E_2}{E_1 (1 + 2\nu_{21}) + E_2} \quad (1.5.4)$$

Dinamik müvazinət şərtini aşağıdakı formada yazmaq:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Huk qanununun (1.5.1) ifadəsinə ortotrop luq halında qüvvə və momentlər üçün aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_x + \nu_{21} \varepsilon_\theta), N_\theta = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\nu_{12} \varepsilon_x + \varepsilon_\theta) \\
 S_1 = S_{\theta x} &= 2Gh \varepsilon_{x\theta} + 2G \frac{h^3}{12R} \tau, S_2 = S_{x\theta} = 2Gh \varepsilon_{x\theta}, H = 2G \frac{h^3}{12} \tau \\
 M_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (k_x + \nu_{21} k_\theta), M_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\nu_{12} k_x + k_\theta)
 \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

(1.5.6)-ifadələrində deformasiyanın yerdəyişmələrlə ifadəsini nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu_{21}}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu_{21}}{R} u_r \right), \\
 N_\theta &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left( \nu_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} u_r \right), \\
 S_1 = S_{\theta x} &= Gh \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) + 2G \frac{h^3}{12} \left( -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right), \\
 S_2 = S_{x\theta} &= Gh \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right), \\
 H &= -2G \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right), \\
 M_1 &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\nu_{21}}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu_{21}}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\
 M_2 &= -\frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left( \nu_{12} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

(1.5.7)- ifadələrini (1.5.5)- dinamik müvazinət tənliklərində nəzərə almaqla, ölçüsüz koordinatlara keçid etsək, sərbəst rəqslər sistemi üçün yerdəyişmələrdə dinamik müvazinət tənliyinin diferensial tənliyi aşağıdakı formanı alır:

$$\left( L - \rho \frac{2(1 - v_{12}v_{21})}{(E_1 + E_2)} R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = 0 \quad (1.5.8)$$

burada,

$$L_{11} = b_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_G \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$L_{12} = (b_1 v_{21} + b_G) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x}$$

$$L_{13} = b_1 v_{21} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{21} = (b_2 v_{12} + b_G) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x}$$

$$L_{22} = b_2 (1 + a) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + b_G (1 + 4a) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_{23} = b_2 \frac{\partial}{\partial \theta} - a \left( v_{12} b_2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + b_2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) - 4b_G a \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$L_{31} = -b_2 v_{12} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{32} = -b_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + a \left( v_{21} b_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + b_2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) + 4b_G a \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$L_{33} = b_1 \left( -a \frac{\partial^4}{\partial x^4} - v_{21} a \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) - 4b_G a \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + b_2 \left( -v_{12} a \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial \theta^2} - a \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - 1 \right)$$

burada,

$$b_1 = \frac{2E_1}{E_1 + E_2}$$

$$b_2 = \frac{2E_2}{E_1 + E_2}$$

$$b_G = \frac{2G(1 - v_{12}v_{21})}{E_1 + E_2}$$

$$a = \frac{h^2}{12R^2}$$

olduğu nəzərə alınıb.

İzotrop halda olduğu kimi həll aşağıdakı formada axtarılır:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_m e^{kx-i\Omega t} \cos(m\theta) \\ V_m e^{kx-i\Omega t} \sin(m\theta) \\ W_m e^{kx-i\Omega t} \cos(m\theta) \end{pmatrix} \quad (1.5.9)$$

$\omega$ - tezliyinin  $\Omega$ - kəmiyyəti ilə əlaqəsini aşağıdakı düstur vasitəsilə verək:

$$\omega^2 = \rho \frac{2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 + E_2} R^2 \Omega^2 \quad (1.5.10)$$

Bu zaman dispersiya tənliyi  $\bar{L}$ -matrisinin təyini ilə sifıra bərabər götürülür.

$$\det \bar{L} = 0 \quad (1.5.11)$$

Onun komponentləri aşağıdakı formada təyin edilir:

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} &= b_1 k^2 - b_G m^2 + \omega^2 \\ \bar{L}_{12} &= (b_1 \nu_{21} + b_G) m k \\ \bar{L}_{13} &= b_1 \nu_{21} k \\ \bar{L}_{21} &= -(b_2 \nu_{12} + b_G) m k \\ \bar{L}_{22} &= b_G k^2 - b_2 m^2 + a(-b_2 m^2 + 4b_G k^2) + \omega^2 \\ \bar{L}_{23} &= -b_2 m + a\{(b_2 \nu_{12} + 4b_G) m k^2 - b_2 m^3\} \\ \bar{L}_{31} &= -b_2 \nu_{12} k \\ \bar{L}_{32} &= -b_2 m + a\{(b_1 \nu_{21} + 4b_G) m k^2 - b_2 m^3\} \\ \bar{L}_{33} &= -b_2 + a\{(-b_1 k^4 + b_1 \nu_{21} + b_2 \nu_{12} + 4b_G) m^2 k^2 - b_2 m^4\} + \omega^2 \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Xüsusi halda  $m = 0$  olduqda  $\bar{L}$ - operatorunun matrisi aşağıdakı formanı alır:

$$\bar{L}_0 = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & 0 & \bar{L}_{13} \\ 0 & \bar{L}_{22} & 0 \\ \bar{L}_{31} & 0 & \bar{L}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 k^2 + \omega^2 & 0 & b_1 \nu_{21} k \\ 0 & b_G(1 + 4a)k^2 + \omega^2 & 0 \\ -b_2 \nu_{12} k & 0 & -b_1 a k^4 - b_2 + \omega^2 \end{pmatrix} \quad (1.5.13)$$

Matsinin həllindən alınan dispersiya tənliyi aşağıdakı formada yazılır:

$$(b_g(1+4a)k^2 + \omega^2) \left( -b_1^2 ak^6 - b_1 a \omega^2 k^4 + b_1 (\omega^2 - b_2 + b_2 v_{12} v_{21}) k^2 + \omega^2 (\omega^2 - b_2) \right) = 0 \quad (1.5.14)$$

(1.5.13)- matrisinin sıfıra bərabər olması  $\bar{L}_{22} = 0$  ifadəsinin hesabına baş verirsə, demək ki, çevrəvi yerdəyişmə sıfıra bərabər deyil, oxboyu və radial yerdəyişmələr isə sıfırdır. Bu o deməkdir ki, yayılan dalğalar sırf fırlanan dalğalardır. Əgər (1.5.13)- matrisinin sıfıra bərabər olması  $\bar{L} \neq 0$  ifadəsinin hesabına baş verirsə, demək ki, çevrəvi yerdəyişmə sıfıra bərabər, oxboyu və radial yerdəyişmələr isə sıfırdan fərqlidir.

## 1.6. Borularda maye-qaz qarışığının axınının xüsusiyyətləri

Son dövrlərdə, maye-qaz sistemi ilə bağlı aparılan tədqiqatlarda göstərilmişdir ki, doyma təzyiqini aşan, lakin ona yaxın olan təzyiqlər aralığında maye-qaz sistemlərin reoloji və relaksion xüsusiyyətləri əsasən, "mikro nüvələrin" olması – kooperativ təsiri, təzyiq doyma təzyiqinə yaxınlaşdıqda özünü göstərən kiçik qaz qabarcıqlarının mövcud olması halında müəyyən olunur [53], [114].

İki fazalı axınların daşınması ilə əlaqəli məsələləri həll edərkən, mütləq şəkildə nəzərə almaq lazımdır ki, bu cür iki fazalı mühit digər iki fazalı mühitlərdən onunla fərqlənir ki, daşıyıcı fazanın vahid həcmə düşən kütlə tərkibinin üstünlük təşkil etməsi hesabına, daşıyıcı fazanın  $\rho_1 c_1$  istilik tutumu, dispers fazanın  $\rho_2 c_2$  istilik tutumunu əhəmiyyətli dərəcədə artırır [114]:  $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2 (c_1 \sim c_2, \rho_1 / \rho_2 \gg 1)$ . Burada  $\rho_1$  və  $\rho_2$  müvafiq olaraq, maye və qaz fazaların sıxlıqlarıdır. Bununla

əlaqədar olaraq, maye termostat roulunu oynayır və temperaturu sabit qəbul edilir  $T_1 = const$ .

Bu xüsusiyyətlər çərçivəsində silindrik borularda iki fazalı qabarcıqlı mayenin axınının təbiəti nəzəri və praktiki cəhətdən ciddi maraq doğurur. Sözü gedən problemin aktuallığı həm də mühəndislik praktikasında (tibb, neft və qazın nəqli və saxlanması, aviasiya və s.) maye ilə doldurulmuş boşluqlara malik elementləri olan konstruksiyaların istifadəsində və öyrənilməsində geniş tətbiq olunur [99]. Qeyd etmək yerinə düşər ki, konstruksiya elementlərinin tərkibində olan mayələr əksər hallarda homogen deyil və tərkibini az miqdarda həll olunmamış qaz təşkil edir.

Maye, qaz fazaların və bərk cisim komponentin mühitləri bir qayda olaraq izotrop, homogen, bərk cisim isə sonsuz silindrik örtük kimi modelləşdirilmişdir [73].

Hesab edirik ki, maye-qaz mühitin hərəkəti oxa simmetrikdir. Bu halda, əgər  $o x$  oxunu borunun oxu boyu yönəltək və  $r$  – koordinatını radial koordinat qəbul etsək,  $(r, x)$  silindrik koordinat sistemində örtüyün hərəkət tənlikləri aşağıdakı kimi olacaq [20]:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w_r}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E} \rho_T \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} \quad (1.6.1)$$

$$\frac{w_r}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E} \left( -\rho_T \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + \frac{p}{h} \right) \quad (1.6.2)$$

Burada  $\rho_T$  – örtük materialının sıxlığı,  $w_r$  və  $w_x$  – müvafiq olaraq, boru hissəciklərinin yerdəyişmə vektorunun radial və oxboyu koordinatları,  $t$  zaman,  $\nu$  və  $E$  – müvafiq olaraq, Puasson əmsalı və Yunq modulu,  $R$  və  $h$  borunun radiusu və qalınlığı,  $p$  – maye-qaz mühitin təzyiqidir.

Örtüyün daxili səthində ikifazlı mühitin və örtük divarının radial sürətlərinin bərabərliyi şərti qəbul olunur:

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial w_r}{\partial t} \quad (1.6.3)$$

Qarışıqın vahid həcmində qabarcıqların həcmi tutumu  $\alpha_2 \sim 1\%$  təşkil edirsə, (bu tip məsələ praktik nöqteyi nəzərdən olduqca əhəmiyyətlidir) mühitin dayanıqlı qabarcıqlı quruluşu realizə olunur və sonuncuya “bircins qabarcıqlı maye” kimi baxmaq mümkündür [26]. Bu cür mayelərin xarakterik xüsusiyyəti yüksək orta sıxlıqdır:

$$\rho = \alpha_1 \rho_1^0 + \alpha_2 \rho_2^0 \approx \alpha_1 \rho_1^0 \approx \rho_1^0 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1), \quad (1.6.4)$$

hansı ki,  $\rho \ll \rho_1^0$ ,  $\alpha_2 \ll 1$  şərtlər daxilində daşıyıcı fazanın sıxlığından çox az fərqlənir. Burada 1 və 2 indeksləri maye və qaz fazaların parametrlərinə uyğundur. Bu halda qarışıqın sıxılması faktiki olaraq, onun tərkibindəki qaz fazasının sıxılması hesabına baş verir, maye mühit praktik olaraq sıxılmır.

Özlülüyn fazalararası qarşılıqlı təsirdə və impuls köçürülməsinin makroskopik proseslərində meydana çıxdığı və ya təsirinin yarandığı haqqında ümumi qəbul olunmuş fərziyyələrdən istifadə edək. Həmçinin qəbul edək ki, qarışıqın orta kütlə temperaturu sabitdir. Bu fərziyyələr əsasında xəttləşdirilmiş kəsilməzlik tənliyi və hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (1.6.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.6.6)$$

Burada 0 indeksi müvazinət və ya həyəcanlanmamış hala uyğun gəlir.

(1.6.5)- tənliyini borunun en kəsiyi boyu ortalaşdıraq. Nəzərə alsaq ki,

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^R 2\pi r A dr}{\pi R^2} \quad \text{və ya} \quad \int_0^R r A dr = \langle A \rangle \frac{R^2}{2},$$

Alırıq:

$$\frac{2}{R} \nu_r \Big|_{r=R} + \frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.6.7)$$

Maye fazanın hal tənliyi:

$$p_1 - p_0 = C_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{10}^0) \quad (1.6.8)$$

Növbəti addımlarda nəzərə alacağıq ki:

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 \left( p_2 - \frac{2\sigma}{a} \right) \approx \alpha_1 p_1 \approx p_1 \quad (1.6.9)$$

(1.6.4) ifadəsini nəzərə almaqla, (1.6.8) tənliyindən alarıq:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} = C_1^2 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} = C_1^2 \left( \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho_0}{\alpha_{10}^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right) \quad (1.6.10)$$

Radiusu  $a$  olan qabarcıqların qabarcığının vahid həcmindəki miqdarı, qabarcıqların həcmi konsentrasiyası  $\alpha_2$  ilə aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir:

$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n \quad (1.6.11)$$

Vahid həcmdəki qabarcıqların miqdarı, fazalar arası kütlə ötürülməməsi halında

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n_0}{r} \frac{\partial (r \nu_r)}{\partial r} + n_0 \frac{\partial \nu_x}{\partial x} = 0 \quad (1.6.12)$$

tənliyini ödəyir. (1.6.5) və (1.6.12) ifadələrinə əsasən:

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial t} \quad \text{və ya} \quad \frac{n}{n_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.6.13)$$



(1.6.11) ifadəsini diferensiallasaq, alınmış münasibəti xəttləşdirsək:

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 4\pi a_0^2 \frac{\partial a}{\partial t} n_0 + \frac{4}{3} \pi a_0^3 \frac{\partial n}{\partial t} \quad (1.6.14)$$

Qaz maye qarışığı və kiçik ölçülü bərk hissəcikləri olan qazlarda müəyyən sərhəd layı məsələsinin riyazi modelləşdirilməsi [30] aparılmışdır. Qabarcıqlı maye ilə doldurulmuş elastiki divarlı borularda səs dalğalarının dinamikası məsələsi [25], [37] işlərində aparılmışdır. Qabarcıqların pulsasiyası zamanı maye fazanın radial inersiyasının praktik olaraq kiçik olduğu və fazaların təzyiqləri arasındakı fərq mayedəki özlülük qüvvələri hesabına tarazlaşdırıldığı vəziyyəti nəzərdən keçirək. Belə vəziyyətlər qabarcıqlar kiçik, maye özlü olduqda baş verir. Fazaların ayrılma sərhədinin hərəkət qanununu təsvir edən Reley tənliyində inersiya hədlərini nəzərdən atsaq [70], [114]:

$$p_2 - p_1 - 2\sigma/a - 4\mu_1 a \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

Burada  $\sigma$  – səthi gərilmə əmsalı,  $\mu_1$  – mayenin özlülüydür. Sonuncu ifadədən də istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{a}{4\mu_1} \left( p_2 - p_1 - \frac{2\sigma}{a} \right) \quad (1.6.15)$$

[114] əsasən:

$$p = \alpha_1 p_1 + (1 - \alpha_1) \left( p_2 - \frac{2\sigma}{a} \right) = p_2 - \frac{2\sigma}{a} + \alpha_1 \left( p_1 - p_2 + \frac{2\sigma}{a} \right)$$

$$p_2 - p_1 - 2\sigma/a = \frac{p_2 - p - \frac{2\sigma}{a}}{\alpha_1} = \frac{p_2^0 - p}{\alpha_1}, \quad p_2^0 = p_2 - \frac{2\sigma}{a}$$

Sonuncu ifadələri (1.6.15) tənliyində nəzərə alsaq:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{a}{4\mu_1\alpha_1} (p_2^0 - p) \quad (1.6.16)$$

(1.6.16) və (1.6.13) ifadələrini (1.6.14) tənliyində yazmaqla alarıq:

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = \frac{3\alpha_{20}}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\alpha_{20}}{n_0} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{3\alpha_{20}}{4\mu_1\alpha_{10}} (p_2^0 - p) + \frac{\alpha_{20}}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.6.17)$$

Növbəti addımda sonuncu (1.6.17) ifadəsini (1.6.10)-da yazırıq:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{C_1^2}{\alpha_{10}^2} \left[ \alpha_{10} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{3\alpha_2 (p_2^0 - p)\rho}{4\mu_1\alpha_{10}} + \alpha_{20} \frac{\partial p}{\partial t} \right] = \frac{C_1^2}{\alpha_{10}^2} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3\alpha_{20} (p_2^0 - p)\rho}{4\mu_1\alpha_{10}} \right]$$

Buradan alınır:

$$\frac{1}{C_f^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p - p_2^0}{\zeta}, \quad C_f = C_1/\alpha_{10}, \quad \zeta = \frac{4\mu_1\alpha_{10}}{3\alpha_{20}} \quad (1.6.18)$$

Maye fazada səs sürəti  $C_1$  böyük, qabarcıqların həcmi tutumu kiçik olduğu üçün mayenin sıxlığını nəzərdən ata bilərik,

$$C_1, C_f \rightarrow \infty,$$

Belə olduğu halda təzyiqin təyin edilməsi üçün yazdığımız (1.6.18) tənliyi də sadələşir və aşağıdakı formanı alır:

$$p = p_2^0 + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.6.19)$$

$p_2^0$  təzyiqini individual qabarcığın kütləsinin saxlanma tənliyindən təyin edə bilərik:

$$\frac{p_2^0}{p_{20}^0} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (1.6.20)$$

(1.6.20) münasibətini aşağıdakı kimi də yazıya bilərik:

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3$$

Təkmil qazın hal tənliyini də nəzərə alsaq:

$$\rho_2^0 = p_2 / BT_0, \quad \rho_2^0 / \rho_{20}^0 = p_2 / p_{20} \quad ,$$

(1.6.11) və (1.6.13) hesabına  $\left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \frac{\alpha_{20} \rho}{\alpha_{20} \rho_0}$  alırıq. (1.6.4) tənliyindən

$\rho \approx \rho_2^0 (1 - \alpha_2)$  və ya  $\alpha_2 = (\rho_{10}^0 - \rho) / \rho_{10}^0$  alınır. Sonunculardan isə nəticədə:

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \frac{\alpha_{20} \rho_{10}^0 \rho}{\rho_{10}^0 - \rho \rho_0}$$

ifadəsini yazıya bilərik. Əgər sadəlik üçün kapilyar effektləri nəzərdən atsaq ( $\sigma = 0$ ),

(1.6.19) təzyiq ifadəsinin xəttilləşdirilmiş forması aşağıdakı kimi olacaq:

$$p = \frac{p_0}{\rho_0 \alpha_{20}} \rho + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.6.21)$$

Beləliklə, qarışıqın  $p$  təzyiqinin tapılması üçün tam tənliklər sistemi aşağıdakı formada olacaq:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{2}{R} \frac{\partial w_r}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ p &= \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{\alpha_{20}} \rho + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.6.22}$$

(1.6.1), (1.6.2) və (1.6.22) qapalı tənliklər sistemi təşkil edir, daxilində maye-qaz mühitin olduğu örtüklərdə kiçik həyəcanlanmalarda evalyasiya təyini üçün istifadə oluna bilər.

Daha sonra aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətlərdən də istifadə edə bilərik:

$$\begin{aligned}W_r &= w_r/R, & W_x &= w_x/R, & P &= p/p_0, & V &= v_x/v_0, & v_0 &= R/t_0, \\ z &= x/R, & \tau &= t/t_0, & t_0 &= R\sqrt{\rho_T/E}, & \alpha &= p_0 R/hE, & \beta &= p_0 \rho_T/\rho_0 E, \\ Q &= \rho/\rho_0, & M &= \zeta/p_0 t_0\end{aligned}$$

Onda tənliklər sistemi ölçüsüz formada belə olacaq:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W_x}{\partial z^2} + v \frac{\partial W_r}{\partial z} &= (1-v^2) \frac{\partial^2 W_x}{\partial \tau^2} \\ W_r + v \frac{\partial W_x}{\partial z} &= (1-v^2) \left( -\frac{\partial^2 W_r}{\partial \tau^2} + \alpha P \right) \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\beta \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial z} + 2 \frac{\partial W_r}{\partial \tau} &= 0 \\ P &= \frac{1}{\alpha_{20}} Q + M \frac{\partial Q}{\partial \tau}\end{aligned}\tag{1.6.23}$$

İndi isə mayenin özlülüyünün sabit olduğu hala baxaq. Mayenin özlülüyü əhəmiyyətli formada təzyiq və temperaturdan asılıdır. Özlülüyün təzyiqdən asılılığı təzyiqin geniş diapazonda dəyişdiyi halda belə, praktik olaraq, xətti qanunla baş verir:

$$\mu(p) = \mu_{am}(1 + \alpha_p p), \quad (1.6.24)$$

burada:  $\mu_{am}$  – atmosfer təzyiqində mayenin özlülüyü,  $\alpha_p$  – eksperimentdən təyin olunan mütənasiblik əmsəlidir.

(1.6.2) və (1.6.9) ifadələrinə analogi olaraq:

$$\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 \approx \alpha_1 \mu_1 = (1 - \alpha_2) \mu_1$$

Kapilyar qüvvələri nəzərə almadığımız qeyri-xətti məsələ üçün aşağıdakı tənliklər sistemini yaza bilərik:

$$p = p_2 + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.6.25)$$

$$p_2 = \frac{\alpha_{20} p_0 \rho_{10}^0}{\rho_{10}^0 - \rho} \frac{\rho}{\rho_0} + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{4\mu_1 \alpha_{10}}{3\alpha_{20}}$$

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 \left( p_2 - \frac{2\sigma}{a} \right) \approx \alpha_1 p_1 \approx p_1 \quad (1.6.26)$$

$$p_2 = C_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{10}^0)$$

Sıxılmayan maye üçün isə:

$$p = \frac{\alpha_{20} p_0 \rho_{10}^0}{\rho_{10}^0 - \rho} \frac{\rho}{\rho_0} + \zeta \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \zeta = \frac{4\mu_1 (1 - \alpha_{10})}{3\alpha_{20}} \quad (1.6.27)$$

Sonuncu ifadələrdə  $p$  və  $\rho$  – müvafiq olaraq, maye-qaz mühitin təzyiqi və sıxlığıdır,  $\alpha_{20}$  – qarışığın vahid həcmində qabarcıqların həcmi tutumu ( $\alpha_{20} \sim 0,01-0,1$ ),  $\mu_1$  – mayenin dinamik özlülük əmsalındır, (su üçün  $\mu_1 = 10^{-3} Pa \cdot san = 10^{-3} N \cdot san/m^2$ ),  $\rho_{10}^0$  – mayenin sıxlığıdır (atmosfer təzyiqində su üçün  $\rho_{10}^0 = 1000 \kappa q/m^3$ ). Sıfır indeksi parametrlərin  $t = 0$  zaman anındakı qiymətlərinə müvafiqdir.

## II FƏSİL

### İKİFAZALI ÖZLÜ MAYENİN DEFORMASIYA OLUNAN ELASTİKİ ÖRTÜKLƏRDƏ HƏRƏKƏTİNİN RİYAZİ MODELİ

Bu fəsildə silindrik ortotrop boruda özlü mayenin birölçülü hərəkətinə baxılırkən, kəsilməzlik tənliyinin borunun en kəsiyinə görə ortalaşdırılmış formasından istifadə olunur. İkifazlı mühit kimi tərkibində az miqdarda qaz qabarcıqları olan maye-qaz sisteminə baxılmış, bu cür mühitin axını məsələsi araşdırılaraq, əldə edilmiş ədədi nəticələr əsasında qrafik və cədvəllər qurulmuşdur. Təcrübi və nəzəri araşdırmalar göstərir ki, ikifazlı maye-qaz mühitin xarakterik xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, belə mühitlərdə daşınan fazanın istilik tutumu dispers fazanın istilik tutumunu dəfələrlə üstələyir. Belə olan halda isə baxılan mühit üçün daşıyıcı fazanı sabit hərarətli termostat kimi qəbul edə bilərik.

#### **2.1. Sferik qabarcıqlı maye-örtük sisteminin hidrodinamik xarakteristikalarının özlülüyn bir halı üçün riyazi analizi**

Mayenin riyazi modeli: qabarcıqlı mayelərin axını məsələləri araşdırılarkən, onların riyazi təsvirinə dair zəruri olan fərziyyələri vermək lazımdır. Sadalayacağımız fərziyyələrin köməyi ilə qoyulmuş məsələ kifayət qədər sadələşir, ancaq bu zaman əsas məqsəd məsələnin mahiyyətini təhrif etmədən sadələşdirmə aparmaqdan ibarətdir [114]:

- mövcüd elementar makrohəcmdə eyni sferik formalı  $r_0$  radiuslu qabarcıqlar mövcuddur. Digər tərəfdən, maye daxilindəki qabarcıqların həcm konsentrasiyası

kiçikdir (birləşmə monodispersdir), eyni zamanda  $r_0$  kəmiyyəti məsələnin xarakterik ölçülərindən kifayət qədər kiçikdir;

- maye daxilindəki qabarcıqların bir-biriylə qarşılıqlı təsirini və toxunmalarını nəzərdən atmaq olar;
- qabarcıqların birləşməsi, yəni koagulyasiya, dağılması və təzə qabarcıqların meydana gəlməsi prosesləri nəzərə alınmır;
- daşıyıcı mayenin və maye daxilindəki qabarcıqların sürəti eyni qiymətə malikdir;
- qabarcıqlar sabit şəkildə üzür, yəni mayenin dibinə və mayenin səthinə hərəkət etmir;
- daşıyıcı fazanın özlülüyü qaz qabarcıqlarının özlülüyündən nəzərə çarpacaq qədər böyükdür (nümunə olaraq, suyun özlülüyünün havanın özlülüyündən təxminən 10 dəfə çox olmasını göstərmək olar). Bunları nəzərə alsaq, qarışıqın özlülüyü, nəticə etibarı ilə qabarcıqların həcm tutumundan asılı olaraq dəyişir.

Qeyd olunan fərziyyələr daxilində hidrodinamikanın tənliklər sistemi aşağıdakı tənliklərdən ibarətdir:

Qəbul etdiyimiz fərziyyələr daxilində mayenin hərəkət tənliyi, axının en kəsiyi boyu kəsilməzlik tənliyinin ortalaşdırılması və ikifazlı mühitin reoloji tənliyindən ibarət aşağıdakı münasibətləri alırıq [89], [124]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = p - a^2 \rho \quad (2.1.3)$$

Sonuncu tənliklərdə  $u(x,t)$ - ilə qarışıqın axınının sürəti,  $w(x,t)$ - örtüyün radial yerdəyişməsi,  $p(x,t)$ - hidrodinamik təzyiq,  $\rho(x,t)$ - qarışıqın sıxlığı işarə olunub.

[9], [127] əsasən  $a^2$  və  $\rho$



$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{10} - \rho_{20}} \right)^2 \frac{p_0}{\rho_{10}} . \quad (2.1.4)$$

(2.1.4)- müvazinətli mühitdə səsin yayılma sürətinin kvadratıdır.

$$\rho_0 - \alpha_{10}\rho_{10} = \alpha_{20}\rho_{20} \quad (\alpha_{10} + \alpha_{20} = 1), \quad (2.1.5)$$

$$\xi = \frac{4}{3} \frac{\mu(1-\alpha_{20})}{\alpha_{20}} \quad (2.1.6)$$

(2.1.6)- ifadəsi həcmi özlülüyü xarakterizə edir, burada  $\mu$ - daşıyıcı fazanın, yəni baxdığımız halda maye fazanın dinamik özlülük əmsalı,  $\alpha_{20}$ – qabarcıqların həcmi konsentrasiyası,  $\rho_{10}, \rho_{20}$ – müvafiq olaraq, daşıyıcı və dispers fazaların sıxlıqlarının müvazinətli mühitdə qiymətidir.  $\rho_{20} \ll \rho_{10}$  olduqda, yəni daşıyıcı fazanın sıxlığı daşınan fazanın sıxlığından çox kiçik olduqda, ikifazlı mühitin sıxlığının ifadəsi üçün kifayət qədər dəqiqliklə aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \approx \alpha_{10}\rho_{10} \approx \rho_{10} . \quad (2.1.7)$$

Bu hal imkan verir ki, (2.1.4) və (2.1.6) ifadələrini aşağıdakı kimi yazaq:

$$a^2 \approx \frac{p_0}{\alpha_{20}\rho_{10}} , \quad \xi \approx \frac{4}{3} \frac{\mu}{\alpha_{20}} . \quad (2.1.8)$$

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, ikifazlı mayenin sıxılması, onun tərkibində olan qaz qabarcıqları hesabına baş verir.

## 2.2. Örtüyün hərəkət tənliyi

Elastik ortotrop silindrik örtük-qabarcıqlı özlü maye sisteminə aid məsələyə baxaq. Həyəcanlanmamış halda düzoxlu dairəvi silindrik örtüyün radiusunu  $R$ , qalınlığını  $h$  qəbul edək. Məsələnin həllinə başlayarkən, ilk növbədə örtüyün hərəkət tənliyi yazılmalıdır və biz qəbul edəcəyik ki, örtüyün qalınlığının onun radiusuna nisbəti çox kiçikdir:

$$h/R \ll 1$$

və örtük ətraf mühitlə sərt bərkidilmişdir. Bu şərtlər daxilində, aşağıdakı tənliyi istifadə etmək kifayətdir: [56], [102], [126]

$$p - \frac{hE_2}{(1-\nu_1\nu_2)R^2} w = \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

Sonuncu ifadədə və bundan sonra  $\rho_*$ - örtük divarının sıxlıq,  $E_2$ - Yunq modulu (tangensial),  $\nu_1$  və  $\nu_2$ -Puasson əmsallarıdır. Ortotrop örtük üçün Maksvelə görə :

$$E_2\nu_1 = E_1\nu_2$$

şerti ödənilir.  $(1-\nu_1\nu_2)$ - kəmiyyəti sonuncu ifadədə münasibətlərin hesablanması üçün istifadə olunur. Bu da boru divarının oxa nəzərən sürüşməsinin qarşısını alır. (2.2.1)-ifadəsinin sonuncu həddi örtüyün ətalətliyini xarakterizə edən həddir və həmin ifadədəki birinci həddə nəzərən praktik olaraq, təsirsiz qaldığından, onu nəzərdən atıb bilərik. Buradan alırıq ki,

$$w = \frac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{hE_2} p. \quad (2.2.2)$$

Beləliklə, hesab etmək olar ki, (2.1.1)–(2.1.3) və (2.2.2) tənlikləri hidroelastiklik məsələsinin qapalı tənliklər sistemini təşkil edir. Bu ifadələrdən, borularda qaz-maye

mühitlərin hərəkəti zamanı dalğaların yayılmasını öyrənmək üçün istifadə oluna bilər.

Aldığımız tənliklər sistemini sıxlığa görə həll edərək,

$$\left(1 + \frac{a^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\xi}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial t} \quad (2.2.3)$$

yəkun tənliyini alırıq.

Burada

$$c_0^2 = \frac{hE_2}{2\rho_0(1 - \nu_1\nu_2)R}$$

işarələməsi nəzərə alınır.

Qeyd edək ki, mürəkkəb impulsu hərəkəti təsvir edən zaman dalğalı hərəkətə məxsus olan spektral və ya harmonik araşdırma əsas götürülür. Belə hal zamanı qeyri-stasional formaya malik impulslar sinisoidal xarakterli Furiye sırasına ayrılırlar. Tədqiq olunan tənlik xətti və bircinsdir. Bütün harmonikaların əmsalları ayrılıqda araşdırılır. Tezliyin ifadəsi  $n\omega$  kimi təyin olunur,  $n$ -in natural ədəd olması məlumdur. İmpulsların xarakterini müəyyənləşdirən superpozisiyanın istənilən hissəsində tamamiylə həmin hissəyə uyğun toplananlar cəmləşir. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, mühüm olan qiymətə tamamiylə nəzər yetirdikdə sinisoidal hərəkətin olduğu müşahidə olunur. (verilmiş bir  $\omega$  kəmiyyəti ilə). Bu zaman Furiyenin həlli dəyişənlərə ayrılan funksiyaların hasili kimi axtarılması metodunu tətbiq edən zaman, (2.2.3) – tənliyinin nəticəsini aşağıda göstərilən funksiyalar şəklində axtaraq [83]:

$$\rho(x, t) = y(x) \exp(i\omega t). \quad (2.2.4)$$

Burada  $y(x)$ – axtarılan funksiyaları, ümumi halda kompleks funksiyaadır.  $i = \sqrt{-1}$  isə xəyali ədəddir. (2.2.4) tənliyini (2.2.3)-də nəzərə alsaq və aşağıdakı işarələmə aparsaq:

$$\delta^2 = \frac{m_1 + im_2}{a^2 + im_3}, \quad (2.2.5)$$

(2.2.5) ifadəsində:

$$m_1 = \omega^2 \left(1 + \frac{a^2}{c_0^2}\right), \quad m_2 = \xi \frac{\omega^3}{\rho_0 c_0^2}, \quad m_3 = \xi \frac{\omega}{\rho_0},$$

əvəzləmələri aparılmışdır. (2.2.3) tənliyində (2.2.4) əvəzləməsini edərək, tənliyin həllini ikitərtibli, xətti bircins diferensial tənliyin həllinə gətiririk:

$$y'' + \delta^2 y = 0 \quad (2.2.6)$$

Sonuncu tənlikdə  $y$ -in  $x$  koordinatına görə ikinci tərtibdən törəməsi  $y''$  ilə işarə olunub.

(2.2.5) ifadəsini həqiqi və xəyali hissələrə ayıraq:

$$\delta^2 = \frac{m_1 a^2 + m_2 m_3}{a^4 + m_3^2} - i \frac{m_1 m_3 - m_2 a^2}{a^4 + m_3^2} = k_1 - ik_2. \quad (2.2.7)$$

Kompleks ədəddən kvadrat kök almaya əsasən, (2.2.7) ifadəsində  $\delta$  kəmiyyəti üçün yazarıq:

$$\delta = \pm(\delta_0 - i\delta_1),$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{r+k_1}{2}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{r-k_1}{2}},$$

burada,

$$(r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}).$$

Kompleks  $\delta$  – kəmiyyətinin həqiqi hissəsinin müsbət, xəyali hissəsinin isə mənfi olduğunu (sönmə baş verir) qəbul edəcəyik.

$$\text{Im } \delta < 0. \quad (2.2.8)$$

Dediklərimizə əsasən,

$$\delta = \delta_0 - i\delta_1.$$

Onda qarışıqda dalğa sürəti:

$$c = \omega / \delta_0,$$

kimi olar.  $\delta_1$ - haqqında bir qədər əvvəl danışdığımız sıfırdan kiçik xəyali hissə, uzunluq boyu sönməni ifadə edən kəmiyyətdir.

(2.2.6)- ikitərtibli bircins diferensial tənliyin həlli:

$$y = Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x},$$

Bu zaman yaranan  $A$  və  $B$  - inteqral dəyişənləridir. Bu sabitlər kompleks funksiya və məsələ üçün qoyulan sərhəd şərtlərindən təyin olunur. İndi isə aydın şəkildə alırıq ki,

$$\rho(x, t) = \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (2.2.9)$$

(2.1.3) və (2.2.2) ifadələrində sıxlığın sonuncu ifadəsini nəzərə almaqla, hidrodinamik təzyiq və yerdəyişmə üçün axtardığımız ifadələri əldə edək:

$$p(x, t) = a^2 \rho + \frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} e^{i\omega t} + \frac{\xi}{\rho_0} i\omega \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} e^{i\omega t} =$$

$$\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} e^{i\omega t} \left\{ a^2 + \frac{\xi}{\rho_0} i\omega \right\}$$

Təzyiq üçün alırıq:

$$p(x,t) = (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t) \quad (2.2.10)$$

$$w(x,t) = p \frac{(1 - v_1 v_2) R^2}{hE_1} = \frac{(1 - v_1 v_2) R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t).$$

Təzyiqin ifadəsini nəzərə almaqla, yerdəyişmə üçün alarıq:

$$w(x,t) = \frac{(1 - v_1 v_2) R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (2.2.11)$$

Beləliklə, qoyulmuş məsələni həll edərək, sıxlıq, hidrodinamik təzyiq, yerdəyişmə üçün ifadələr almış olarıq.  $u(x,t)$  sürət funksiyasının ifadəsini təyin etmək üçün, onu aşağıdakı kimi dəyişənlərinə ayrılmış şəkildə axtaraq:

$$u(x,t) = v(x) \exp(i\omega t)$$

Sürətin bu ifadəsini (2.1.2)-də əvəz etməklə, məchul  $v(x)$  funksiyasını təyin edə bilərik və beləliklə, sürət funksiyası üçün:

$$u(x,t) = \frac{\delta(a^2 + im_3)}{\rho_0 \omega} \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (2.2.12)$$

### 2.3. Sərhəd məsələsinin təhlili

Təzyiq  $p(x,t)$ , sürət  $u(x,t)$ , sıxlıq  $\rho(x,t)$  və yerdəyişmə  $w(x,t)$  növbəti ifadələrini almaq üçün uzunluğu  $l$  olan sonlu boruda  $x=0$  və  $x=l$  şərtlərini nəzərə almaqla müxtəlif sərhəd şərtlərini yazmaq olar. Geniş yayılmış praktik məsələlərdə bir qayda olaraq borunun sol ucuna pulsvari təzyiq verilir

$$p(0,t) = p^\vee \exp(i\omega t), \quad (2.3.1)$$

və  $x=l$  olduqda borunun digər ucunda təzyiq sifıra bərabər olur [84]:

$$p(l, t) = 0 \quad (2.3.2)$$

(2.3.1) və (2.3.2) şərtlərini və (2.2.10) bərabərliyində nəzərə alsaq A və B əmsallarını müəyyən etmək üçün aşağıdakı iki tənliklər sistemini alarıq.

$$Ae^{-i\delta} + Be^{i\delta} = 0,$$

$$A + B = \frac{p^\vee}{a^2 + im_3},$$

Tənliklər sisteminin həllini tapmaq üçün aşağıdakı əvəzləmələri apararaq:

$$\alpha = \frac{p^\vee}{a^2 + im_3}$$

$$Ae^{-i\delta} + Be^{i\delta} = 0,$$

$$A + B = \alpha$$

İkinci tənlikdən alarıq ki,

$$B = \alpha - A$$

$$Ae^{-i\delta} + \alpha e^{i\delta} - Ae^{i\delta} = A(e^{-i\delta} + e^{i\delta}) + \alpha e^{i\delta} = 0$$

Onda A-dəyişəni üçün yaza bilərik:

$$A = -\frac{\alpha e^{i\delta}}{e^{-i\delta} - e^{i\delta}},$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\sin \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i},$$

Onda A-dəyişəni üçün alarıq:

$$A = \frac{\alpha e^{i\delta}}{2i \sin \delta} \quad (2.3.3)$$

Müvafiq olaraq B-dəyişəni üçün yaza bilərik:

$$B = \alpha - \frac{\alpha e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} = \alpha + \frac{\alpha e^{i\delta l}}{e^{-i\delta l} - e^{i\delta l}} = \alpha \frac{e^{-i\delta l} - e^{i\delta l} + e^{i\delta l}}{e^{-i\delta l} - e^{i\delta l}} = -\alpha \frac{e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l}$$

$$B = -\alpha \frac{e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} \quad (2.3.4)$$

(2.3.3) və (2.3.4) qiymətlərini (2.2.10) - (2.2.12) formullarında yazmaqla, maye qarışığın sıxlığı, hidrodinamik təzyiq və örtük divarının yerdəyişməsinin ifadələri:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t) = \alpha \left\{ \frac{e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{-i\delta x} - \frac{e^{-i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{i\delta x} \right\} e^{i\omega t} = \\ &= \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{i\delta(l-x)} - e^{i\delta(x-l)}\} e^{i\omega t} = \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{-i\delta(x-l)} - e^{i\delta(x-l)}\} e^{i\omega t} = \\ &= -\frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \cdot 2i \sin \delta(x-l) \exp(i\omega t) = -\alpha \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \cdot \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

alınar. Yekun olaraq, maye qarışığın sıxlığı:

$$\rho(x,t) = -\alpha \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t). \quad (2.3.5)$$

Daha sonra təzyiq funksiyasını hesablayaq:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t) = \\ &= (a^2 + im_3) \left\{ \frac{\alpha e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{-i\delta x} - \frac{\alpha e^{-i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{i\delta x} \right\} \exp(i\omega t) \\ &= (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{i\delta(l-x)} - e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\ &= (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{-i\delta(x-l)} - e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\ &= (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{-2i \sin \delta(x-l)\} \exp(i\omega t) = \\ &= -\alpha (a^2 + im_3) \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

Yekun olaraq, təzyiq funksiyası:



$$p(x,t) = -\alpha(a^2 + im_3) \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t). \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t) = \\ &= \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \left\{ \frac{\alpha e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{-i\delta x} - \frac{\alpha e^{-i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{i\delta x} \right\} \exp(i\omega t) \\ &= \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{i\delta(l-x)} - e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\ &= \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{-i\delta(x-l)} - e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\ &= \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{-2i \sin \delta(x-l)\} \exp(i\omega t) = \\ &= -\alpha(a^2 + im_3) \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

Müvafiq olaraq örtük divarının yerdəyişməsi:

$$w(x,t) = -\alpha(a^2 + im_3) \frac{(1-v_1v_2)R^2}{hE_1} \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t). \quad (2.3.7)$$

Sürət üçün yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x)e^{i\omega t} = \frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} - Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t) = \\
&\frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \left\{ \frac{\alpha e^{i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{-i\delta x} + \frac{\alpha e^{-i\delta l}}{2i \sin \delta l} e^{i\delta x} \right\} \exp(i\omega t) \\
&\frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{i\delta(l-x)} + e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\
&\frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{e^{-i\delta(x-l)} + e^{i\delta(x-l)}\} \exp(i\omega t) = \\
&\frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \frac{\alpha}{2i \sin \delta l} \{2 \cos \delta(x-l)\} \exp(i\omega t) = \\
&\alpha \frac{\delta}{i\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \frac{\cos \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t) = \\
&- \alpha i \frac{\delta}{\rho_0\omega} (a^2 + im_3) \frac{\cos \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t)
\end{aligned}$$

Sürət funksiyasının yekun forması:

$$u(x,t) = -\alpha i \frac{\delta}{\rho_0\omega} \frac{\cos \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t). \quad (2.3.8)$$

Yarımsonsuz örtük üçün ( $l \rightarrow \infty$ ), (2.3.7) və

$$\sin \delta l = \frac{e^{i\delta l} - e^{-i\delta l}}{2i}, \quad \cos \delta l = \frac{e^{i\delta l} + e^{-i\delta l}}{2},$$

Düsturlarına əsasən,  $p(x,t)$  təzyiqlik,  $u(x,t)$  sürət,  $\rho(x,t)$  sıxlıq və  $w(x,t)$  yerdəyişmə kəmiyyətləri üçün aşağıdakı formullar təyin edilir

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \alpha \exp[(i(\omega t - \delta x))], \\
p(x,t) &= \alpha(a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x))],
\end{aligned}$$

$$u(x,t) = -\alpha \frac{\delta}{\rho_0 w} (a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x,t) = \alpha \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) R^2}{h E_1} (a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x)].$$

Sonuncu tənliklərdə Eyler formullarından istifadə edərək, araşdırdığımız funksiyların amplitudlarını hesablaya bilərik:

$$|\rho| = \frac{p^\vee e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_3^2}},$$

$$|p| = p^\vee e^{-\delta_1 x}$$

$$|u| = p^\vee \frac{e^{-\delta_1 x}}{\rho_0 w} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}, \quad (2.3.9)$$

$$|w| = p^\vee e^{-\delta_1 x} \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) R^2}{h E_2}$$

Ortotrop örtük daxilində özlü mayenin axını zamanı yaranan dalğaların sürəti  $c = \omega / \delta_0$  və sönməsinin  $\delta_1$  qabarcıqların həcmi konsentrasiyasından asılılığını araşdıraraq və son olaraq da araşdırdığımız funksiyların amplitudlarının qiymətlərini hesablayaraq, cədvəllər və ya qrafiklər tərtib edək.

Nəticə və ədədi eksperimentlər.

Örtüyün materialının rezin olduğunu qəbul edək, bu zaman onun parametrləri  $E_2 = 4 \cdot 10^5 N/m^2$ ,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $h = 0.002m$ ,  $R = 0.012m$ ,  $\omega = 10^{-1} san^{-1}$ ,  $p^\vee = 140N/m^2$ .

Örtüyün daxilində tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan maye (su) axdığını fərz edirik. Bu zaman hava qabarcıqlarının miqdarı  $\alpha_2 = \{10^{-2} - 10^{-1}\}$  kimi qəbul olunub. Nəzərə alsaq ki, tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan su, təbiətdə və eyni zamanda texnikada bir çox proseslərdə mühüm rola malikdir, o zaman aydın olar

ki, məsələ praktik nöqteyi nəzərdən də maraq kəsb edir. Hesablamalar üçün qəbul etdiyimiz növbəti parametrlər [115]:

$$\rho_0 = 10^3 \text{ kq/m}^3, \mu = 0.11 \cdot 10^{-2} \text{ kq/m} \cdot \text{san}, p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Əvvəlcə  $\delta_0$  və  $\delta_1$ - in qiymətləri təyin edilib, tapılmış qiymətlər cədvəl 2.1-də göstərilib.

Cədvəl 2.1

$\alpha_2$	$\delta_0$
0.01	0.2119
0.02	0.2344
0.03	0.2548
0.04	0.2737
0.05	0.2914
0.06	0.3081
0.07	0.3239
0.08	0.3390
0.09	0.3534
0.1	0.3673

Cədvəldən göründüyü kimi:

$\delta_0$  qabarcıqların vahid həcmdəki miqdarından asılı olaraq artır. Buradakı hesablamalar  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$  intervalında aparılmışdır. Nəticədə  $\delta_0$ -in qiymətində təxminən 1,73 dəfə artım müşahidə olunur.  $\delta_1$ - in qiymətləri isə təxminən sıfıra bərabər olur.  $\delta_1$ - in sıfır olması faktı növbəti cədvəlin qiymətlərini hesablayarkən özünü biruzə verir. Qeyd edək ki,  $\delta_1$ - in sıfırdan fərqli qiymətləri baxdığımız intervalda aşağıdakı kimidir:

$$\alpha_2 = 0.08 \text{ olduqda, } \delta_1 = 8.4 \cdot 10^{-7} \text{ sm}^{-1};$$

$$\alpha_2 = 0.09 \text{ olduqda, } \delta_1 = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ sm}^{-1};$$

$\alpha_2 = 0.1$  olduqda,  $\delta_1 = 2.3 \cdot 10^{-7} \text{ sm}^{-1}$ .

Baxılan  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$  intervalında  $\delta_1$  - in digər qiymətləri isə sıfıra bərabərdir

Sıxlıq və təzyiq amplitudlarının ifadələrini nəzərə alsaq:

$$|\rho| = \frac{p^v e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_3^2}}, |p| = p^v e^{-\delta_1 x}$$

Beləki,  $|p|$ -nin ifadəsindən göründüyü kimi o yalnız  $\delta_1$ -in və  $x$ -in qiymətlərindən eksponensial şəkildə asılıdır,  $x$ -in qeyd olunmuş qiymətində  $\delta_1 = 0$  olduğu üçün  $|p| = p^v$  -yəni, sabit olur.

$|\rho|$ -nun ifadəsindən göründüyü kimi, həm  $\delta_1$ -dən, həm  $x$ -dən, həm də qabarcıqların miqdarından asılılığı var. Sıxlığın amplitudunun qiymətlərinə, əsasən qabarcıqların vahid həcmdəki miqdarının dəyişməsi təsir edir. Beləki,  $\alpha_2$  - kiçik intervalda dəyişdiyi halda belə,  $|\rho|$  - kifayət qədər (təxminən 9 dəfə) artım alır.

Cədvəl 2.2

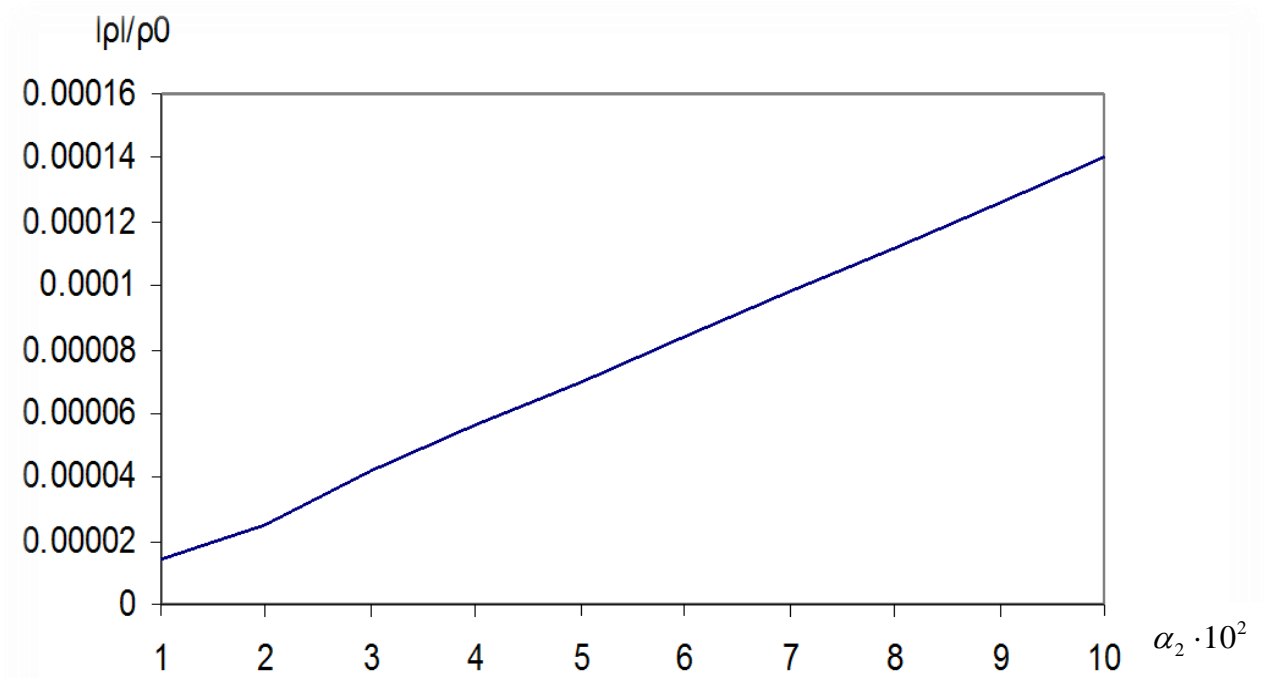
$\alpha_2$	$ U $	$ U /h\omega$
0.01	0.0030	0.1484
0.02	0.0033	0.1640
0.03	0.0036	0.1784
0.04	0.0038	0.1916
0.05	0.0041	0.2040
0.06	0.0043	0.2157
0.07	0.0045	0.2267
0.08	0.0047	0.2474
0.09	0.0049	0.2571
0.1	0.0051	0.2663

Cədvəl 2.2 - sürətin amplitudu üçün qurulmuşdur. Cədvəldən göründüyü kimi  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$  qiymətlərində,  $|U|$ -təxminən 1,7 dəfə artmışdır. Digər dəyişən  $|U|/h\omega$  nisbətində isə bu artım təxminən 1,79 dəfə olmuşdur.

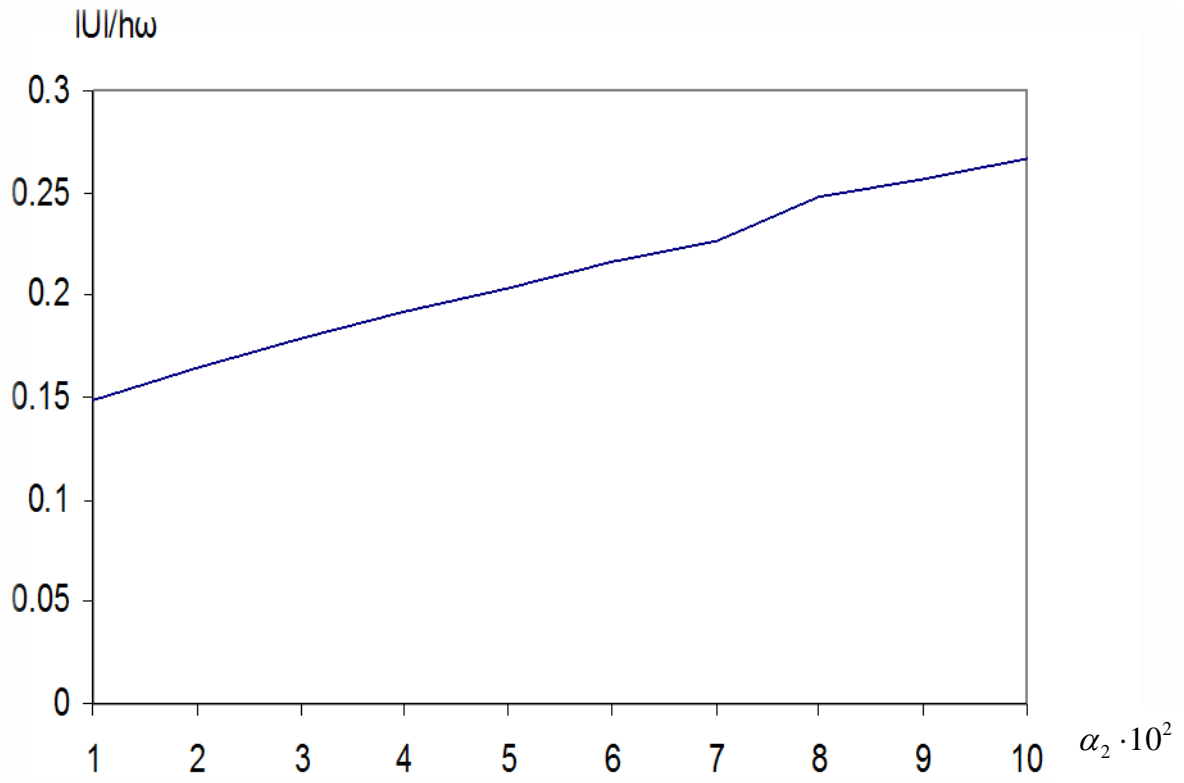
Cədvəl 2.3

$\alpha_2$	$c$
0.01	47.1824
0.02	42.6712
0.03	39.2474
0.04	36.5343
0.05	34.3159
0.06	32.4580
0.07	30.8724
0.08	29.4987
0.09	28.2933
0.1	27.2246

Əyanilik üçün cədvəllərlə aldığımız nəticələrin qrafik təsvirini verək:



Şəkil 2.5. Mayədə sıxlığın dispers hissəciklərin konsentrasiya əmsalından asılılığı



Şəkil 2.6. Mayədə sürətin dispers hissəciklərin konsentrasiyasından asılılığı

İndi isə sistemin parametrini dəyişərək aldığımız nəticələrin necə dəyişdiyini araşdıraq:

$$E_2 = 250 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.1, h = 0.002 \text{ m}, R = 0.012 \text{ m}, \omega = 10^{-1} \text{ san}^{-1}, \\ p^\vee = 140 \text{ N/m}^2$$

tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan  $\alpha_2 = \{10^{-2} - 10^{-1}\}$  qliserin-hava qarışığını araşdıraq [115],

$$\rho_0 = 1.3 \cdot 10^3 \text{ kq/m}^3, \mu = 140 \cdot 10^{-2} \text{ kq/m} \cdot \text{san}, p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Analoji olaraq, burada da  $\delta_0$  və  $\delta_1$ -in qiymətlərini hesablayaq:

$\alpha_2$	$\delta_0$	$\delta_1$
0.01	0.1143	0.00000000
0.02	0.1615	0.00000000
0.03	0.1917	0.00000000
0.04	0.2282	0.00000000
0.05	0.2551	0.00000000
0.06	0.2794	0.00000000
0.07	0.3018	0.00000000
0.08	0.3226	0.00002384
0.09	0.3422	0.00000023
0.1	0.3607	0.00000033

Tərkibində hava qabarcığı olan qliserin-qaz qarışığında  $\delta_0$ , qabarcıqların vahid həcmdəki miqdarından asılı olaraq artır. Burada əvvəlki hesablamalarda olduğu kimi  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$  intervalına baxılmışdır. Nəticədə  $\delta_0$ -ın qiymətində təxminən 3,15 dəfə artım müşahidə olunur.  $\delta_1$ -in qiymətləri isə təxminən sıfıra bərabər olur.  $\delta_1$ -in sıfır olması faktı növbəti cədvəlin qiymətlərini hesablayarkən özünü biruzə verir.

$$|\rho| = \frac{p^v e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_3^2}}, \quad |p| = p^v e^{-\delta_1 x}$$

Beləki,  $|p|$ -nin ifadəsindən görüldüyü kimi o yalnız  $\delta_1$ -in və  $x$ -in qiymətlərindən eksponensial şəkildə asılıdır,  $x$ -in qeyd olunmuş qiymətində  $\delta_1 = 0$  olduğu üçün  $|p| = p^v$ -yəni, sabit olur. Sıxlığın amplitudunun qiymətlərinə, bu dəfə də “su-hava” nümunəsində olduğu kimi əsasən qabarcıqların vahid həcmdəki qiyməti təsir edir və bu təsir təxminən adı çəkilən nümunədə olduğu kimidir,  $|\rho|$ -təxminən 9dəfəyə yaxın artım alır. Eyni dəyişiklik  $\frac{|\rho|}{\rho_0}; \frac{|p|}{p^v}$  ölçüsüz kəmiyyətlərində də müşahidə olunur.



Cədvəl 2.5

$\alpha_2$	$ U $	$ U /h\omega$
0.01	0.0012	0.0616
0.02	0.0017	0.0869
0.03	0.0021	0.1064
0.04	0.0025	0.1229
0.05	0.0027	0.1374
0.06	0.0030	0.1505
0.07	0.0032	0.1625
0.08	0.0035	0.1737
0.09	0.0037	0.1842
0.1	0.0039	0.1942

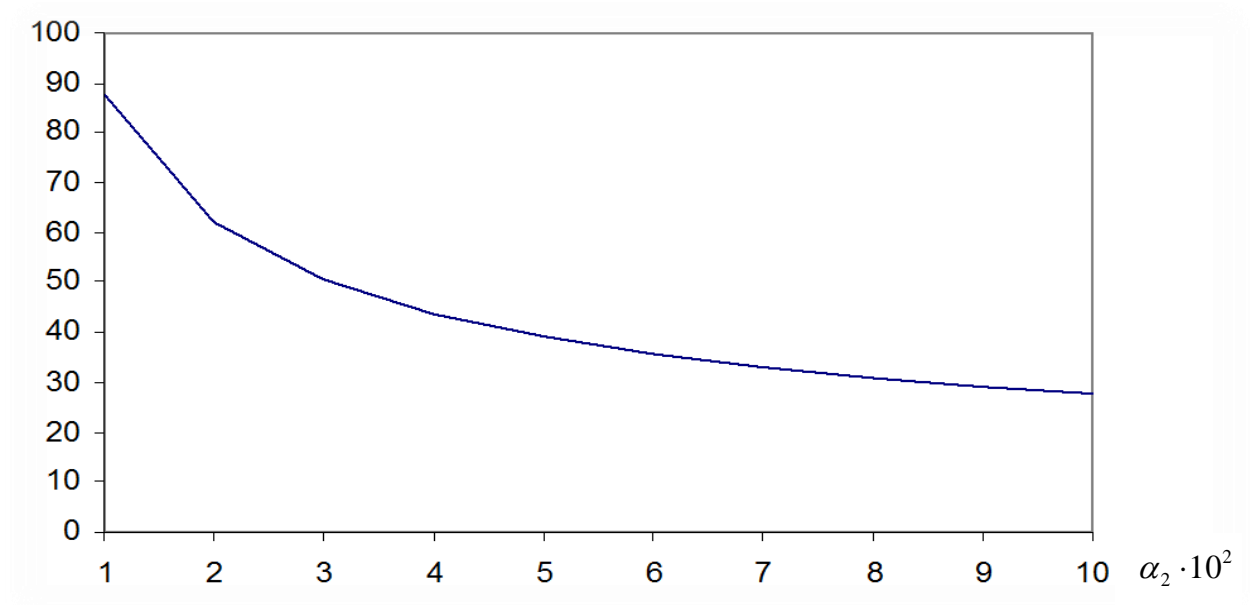
Cədvəl 2.5. Qarışıqın sürətinin amplitudu üçün qurulub. Cədvəldən də görüldüyü kimi  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$ - qiymətində  $|U|$ -təxminən 3,25 dəfə artım alır.

Cədvəl 2.6

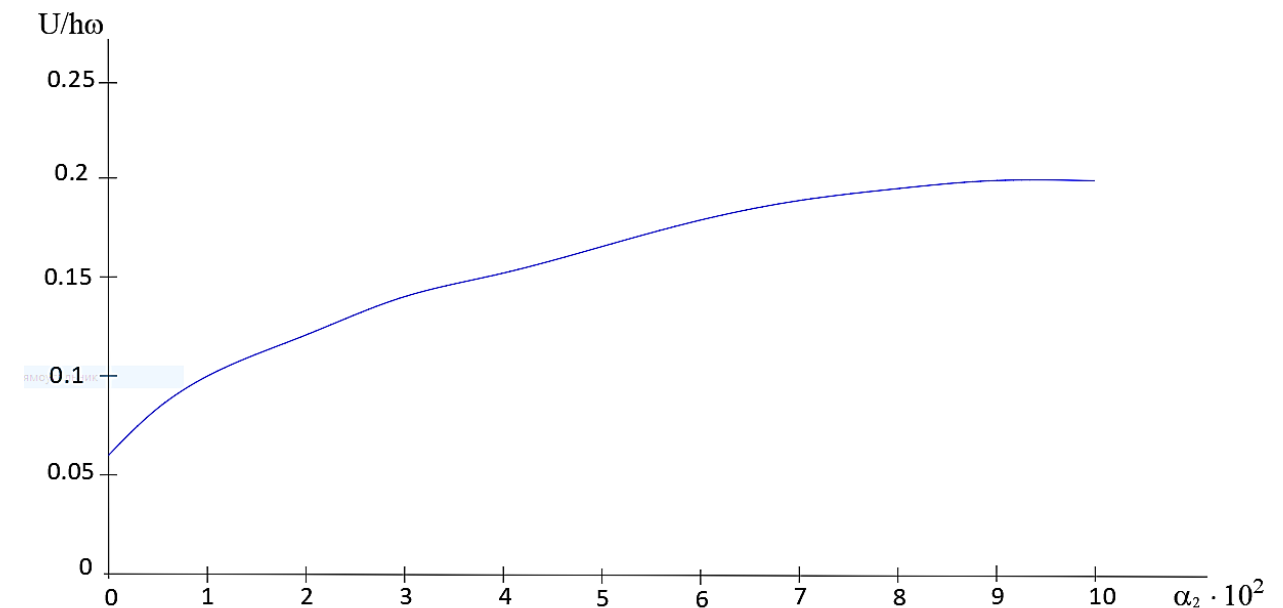
$\alpha_2$	$c = \omega / \delta_0$
0.01	87.4618
0.02	61.9309
0.03	50.5899
0.04	43.8223
0.05	39.2013
0.06	35.7891
0.07	33.1365
0.08	30.9979
0.09	29.2262

Cədvəl 2.6 -dan göründüyü kimi dalğa sürəti,  $\delta_0$ -ın  $\alpha_2$ -dən asılı dəyişməsinə müvafiq olaraq azalır. Bu halda  $c \sim \frac{1}{\delta_0}$  asılılığına görə  $\delta_0$  - təxminən 3,15 dəfə artdığı üçün  $c$ -nin qiymətlərində bir o qədər də azalma müşahidə olunur. Bu asılılığın qrafiki Şəkil 2.7-də göstərilib.

$$c = \omega / \delta_0$$



Şəkil 2.7. Dalğa sürətinin dispers hissəciklərin konsentrasiya əmsalından asılılığı.



Şəkil 2.8. Mayedə sürətin dispers hissəciklərin konsentrasiya əmsalından asılılığı

Cədvəl və qrafiklərdə maye-qaz qarışığının sürətinin, sıxlığının amplitudunun vahid həcmdəki qabarcıqların miqdarından asılılığı verilib. Hidrodinamik təzyiqin və örtük divarının yerdəyişməsinin qiymətlərinin qabarcıqların miqdarından və  $\delta_1 \approx 0$  asılılığının olmadığı müəyyən edilmişdir.

Yekun olaraq, hesablamalar vasitəsi ilə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- dalğanın sürəti azalır, bu azalma paraktik nöqteyi nəzərdən kifayət qədər ciddi azalma kimi qiymətləndirilə bilər;
- sıxlıq funksiyasının amplitudu isə qabarcıqların həcmi konsentrasiyası artdıqca, artır, bu artım ikinci qrafikdə müşahidə olunur;
- maye-qaz qarışığının sürətin amplitudu və buna müvafiq olaraq, qarışığın sərfi artır;
- hesablamalarla məlum olmuşdur ki, maye-qaz qarışığının axınına mayenin özlülüyü kifayət qədər az təsir etmişdir.

#### **2.4. İkifazlı özlü mayenin deformasiya olunan elastiki örtüklərdə hərəkətində axının sərfi**

Yenidən (2.1.1), (2.1.2) və (2.1.3)-tənliklərinə baxaq. Bu tənliklərə daxil olan mayenin və hərəkətin xarakteristik parametrlərini sərf vasitəsi ilə təyin edək. Vahid zamanda borunun canlı kəsiyindən keçən mayenin həcmi [121]:

$$Q(x,t) = \pi R^2 u(x,t) \quad (2.4.1)$$

ifadəsi ilə hesablanır, burada qarışığının sürətinin (2.2.12) ifadəsini nəzərə alsaq, sərfi aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$Q(x,t) = -\pi R^2 \frac{\delta}{\rho_0} \cdot (a^2 + im_3) \cdot A \cdot \exp(-i\delta x) \cdot \exp(i\omega t) \quad (2.4.2)$$

Sonuncu formulda məchul sabit:

$$Q(0,t) = Q^v \cdot \exp(i\omega t)$$

Sərhəd şərtlərindən təyin olunur:

$$Q^v = -\pi R^2 \frac{\delta}{\rho_0} \cdot (a^2 + im_3) \cdot A$$

$$A = -\frac{Q^v \rho_0}{\pi R^2 \delta \cdot (a^2 + im_3)}$$

Beləliklə, sıxlıq [81]:

$$\rho(x,t) = -\frac{\rho_0}{\delta} \frac{Q^v \omega}{\pi R^2 (a^2 + im_3)} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad (2.4.3)$$

təzyiq:

$$P(x,t) = -(a^2 + im_3) \frac{\rho_0}{\delta} \frac{Q^v}{\pi R^2 (a^2 + im_3)} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)] = -\frac{\rho_0}{\delta} \frac{Q^v}{\pi R^2} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$P(x,t) = -\frac{\rho_0}{\delta} \frac{Q^v}{\pi R^2} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad (2.4.4)$$

yerdəyişmə:

$$w(x,t) = -\frac{(1 - \nu_1 \nu_2)}{h E_1} \cdot \frac{1}{\delta} \frac{Q^v}{\pi} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad (2.4.5)$$

sürət:

$$u(x,t) = \frac{Q^v}{\pi R^2} \cdot \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (2.4.6)$$

sonuncu ifadələrlə təyin olunur.(2.4.3)-(2.4.6) ifadələrindən Eyler formuluna əsasən mayeni və hərəkəti xarakterizə edən, adı çəkilən parametrlərin amplitudlarını aşağıdakı formullarla təsvir etmiş olarıq:

$$\begin{aligned}
 |\rho| &= \frac{Q^v \cdot \rho_0 \cdot \omega}{\pi R^2 \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_0^2) \cdot (a^4 + m_3^2)}} \cdot \exp(-\delta_1 x), \\
 |p| &= \frac{Q^v \cdot \rho_0 \cdot \omega}{\pi R^2 \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_0^2)}} \cdot \exp(-\delta_1 x), \\
 |w| &= \frac{Q^v \cdot \omega}{2\pi R c_0^2 \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_0^2)}} \cdot \exp(-\delta_1 x), \\
 |u| &= \frac{Q^v \cdot \omega}{\pi R^2} \cdot \exp(-\delta_1 x),
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

(2.4.7)- ifadələrindən də göründüyü kimi alınmış formullarda sərfdən asılılıq xəttidir. Onun dəyişməsinə müvafiq olaraq, amplitudlar da eyni ilə dəyişir. Ancaq burada maraqlı məqam, sərf vasitəsi ilə tapılan xarakteristikaların amplitudlarının qabarcıqların vahid həcmdəki miqdarından və mayenin sıxlığından asılı olaraq necə dəyişməsidir. Bu məqsədlə ədədi araşdırmalar üçün tərkibində hava qabarcıqları olan dörd maye misalında (su, qliserin, etanol və neft) hərəkətə baxaq. Xarakterik ölçülər:

$$\rho_{neft} = 650 \text{ kq/m}^3,$$

$$\rho_{qliserin} = 1260 \text{ kq/m}^3,$$

$$\rho_{etanol} = 789,3 \text{ kq/m}^3,$$

$$\rho_{su} = 1000 \text{ kq/m}^3.$$

Müəyyənlik üçün örtük materialının rezin olduğunu qəbul edək:

$$E_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1, \quad h = 0.002 \text{ m}, \quad R = 0.012 \text{ m}, \quad \omega = 10^{-1} \text{ san}^{-1},$$

$$Q^v = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{ san}.$$

Eyni zamanda özlülük və hidrostatik təzyiğin qiymətlərini  $\mu = 0.11 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m} \cdot \text{ san}$ ,

$$p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ kimi seçək.}$$

Boruya tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan ikifazlı maye ilə doldurulmuşdur. Qeyd edək ki, məsələ praktik cəhətdən olduqca əhəmiyyətlidir. Müxtəlif mayelər üçün sıxlıq, təzyiq, yerdəyişmə amplitudlarının qabarcıqların vahid həcmdəki miqdarından asılılıq qrafikləri qurulmuşdur. Bu zaman  $\alpha_{20}$ -in  $0.01 \div 0.1$  qiymətlərində hesablamalar aparılmışdır. Qeyd edək ki, bu hesablamalar zamanı  $x$  parametrinin müxtəlif qiymətlərinə də baxılmışdır; 0; 0.05; 0.1 və müəyyən edilmişdir ki, həmin parametrin dəyişməsi amplitudlara praktik olaraq təsir etmir. Bunu (2.4.7)- ifadələrindən də görmək mümkündür, belə ki,  $x$  parametri həmin ifadələrə eksponensial asılılıqla daxildir və  $\delta_1$ -kəmiyyəti təxminən sifira bərabər olduğundan, amplitudların qiymətlərinə praktik olaraq təsir etmir.

Əvvəlcə sıxlığın amplitudunun qabarcıqların miqdarından və daşıyıcı mayenin sıxlığından asılılığını araşdıraq. Şəkil 2.9 -dan görüldüyü kimi, qabarcıqların miqdarı sıxlığın amplituduna kifayət qədər təsir edir. Hər bir maye üçün:

Neft üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|\rho_0| = 0.02301436 \text{ kq/m}^3$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|\rho_0| = 0.10991669 \text{ kq/m}^3$ ,  $\alpha = 0.01 \text{ q/m}^3$ ;

Etanol üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|\rho_0| = 0.0308146 \text{ kq/m}^3$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|\rho_0| = 0.1471394 \text{ kq/m}^3$ ;

Su üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|\rho_0| = 0.04396991 \text{ kq/m}^3$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|\rho_0| = 0.20991097 \text{ kq/m}^3$ ;

Qliserin üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|\rho_0| = 0.006221757 \text{ kq/m}^3$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|\rho_0| = 0.029697627 \text{ kq/m}^3$ ;

Hər bir maye üçün artım təxminən 5 dəfə təşkil edir.

İkifazlı mayenin sıxlığının amplitudunun daşıyıcı mayenin sıxlığından asılı olaraq dəyişməsi məsələn, qliserin və neft üçün təxminən 3 dəfə təşkil edir. Mayenin sıxlığı artdıqca müvafiq olaraq, qarışıqın sıxlığı da artır.

Müvafiq araşdırmanı hidrodinamik təzyiq üçün də aparaq.

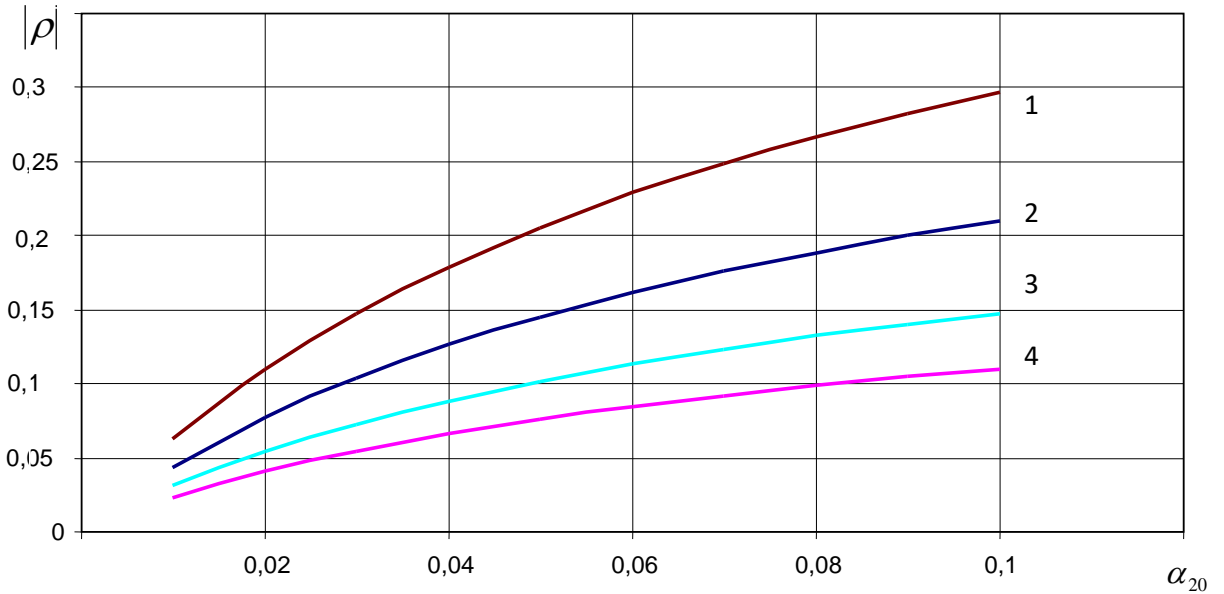
Neft üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|p| = 359.0707805 N/m^2$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|p| = 188.64154 N/m^2$ ; Etanol üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|p| = 395.643935 N/m^2$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|p| = 207.810972 N/m^2$ ; Su üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|p| = 445.29129 N/m^2$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|p| = 233.8387332 N/m^2$ ; Qliserin üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|p| = 499.8033022 N/m^2$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|p| = 2624221522 N/m^2$ ;

Hidrodinamik təzyiq qabarcıqların miqdarından asılı olaraq azalır, azalma baxılan mayelərin hər biri üçün təxminən 2 dəfə təşkil edir. İkifazlı mayenin hidrodinamik təzyiqin amplitudunun daşıyıcı mayenin sıxlığından asılı olaraq dəyişməsi sıxlıq artdıqca, yenə də qliserin və neft misalında təxminən 1.39 dəfə artır. Qarışıqın hərəkətində yerdəyişmənin modulu qabarcıqların miqdarından asılı olaraq azalır. Neft üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|w| = 1.80618110^{13} m$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|w| = 0.86280610^{13} m$ ; Etanol üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|w| = 1.9901410^{13} m$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|w| = 0.9504510^{13} m$ ; Su üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|w| = 2.23986733610^{13} m$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|w| = 1.06944530110^{13} m$ ; Qliserin üçün  $\alpha = 0.01$  qiymətində  $|w| = 2.51406210^{13} m$ ,  $\alpha = 0.1$  olduqda  $|w| = 1.20013410^{13} m$ ;

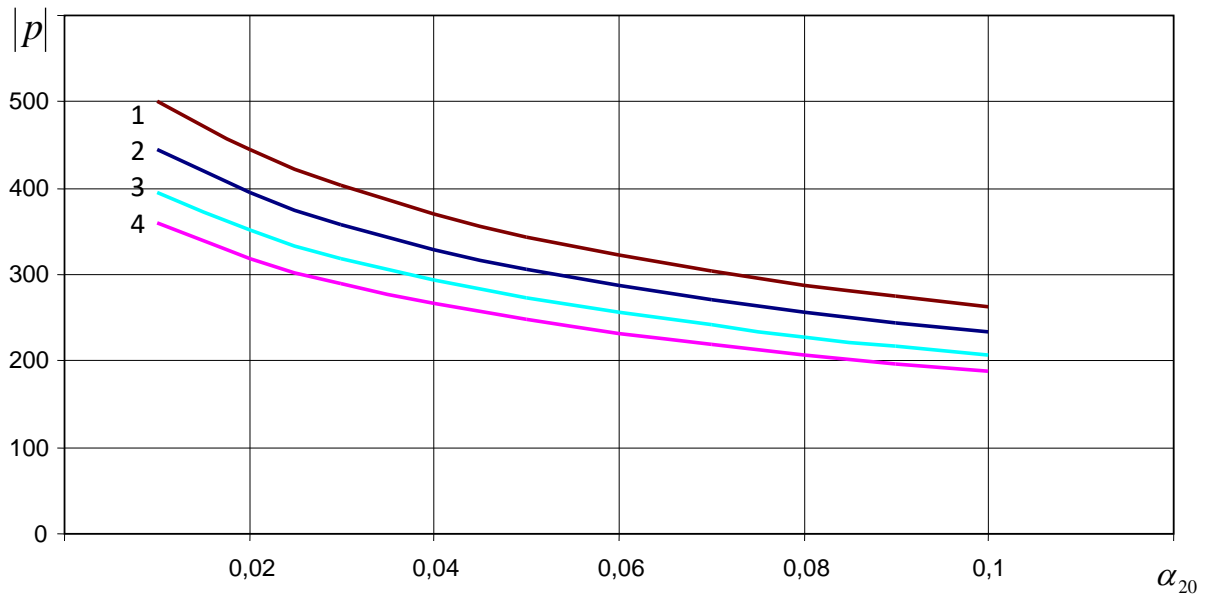
Yerdəyişmə qabarcıqların miqdarından asılı olaraq azalır, azalma baxılan mayelərin hər biri üçün təxminən 2 dəfə təşkil edir. Yerdəyişmənin amplitudunun daşıyıcı mayenin sıxlığından asılı olaraq dəyişməsi sıxlıq artdıqca, yenə də qliserin və neft misalında təxminən 1.39 dəfə artım təşkil edir.

Qarışıqın sürətinə gəlincə, ifadəsindən də göründüyü kimi o, mayenin sıxlığından, sıxlıqdan asılı olaraq dəyişən kəmiyyətlərdən asılı deyil, qabarcıqların miqdarından isə yalnız  $\delta_1$ -vasitəsi ilə asılıdır,  $\delta_1$ -in qiymətləri isə praktik olaraq, sıfıra bərabər olduğu üçün, sürətin qiymətini baxılan mayelərin hər biri üçün və qabarcıqların miqdarının baxılan intervalında təqribən 8.846m/san qəbul etmək olar.

Bu səbəbdən, həmin qiymətlərin ayrıca cədvəl və ya qrafiklə göstərilməyinə ehtiyac duyulmamışdır.



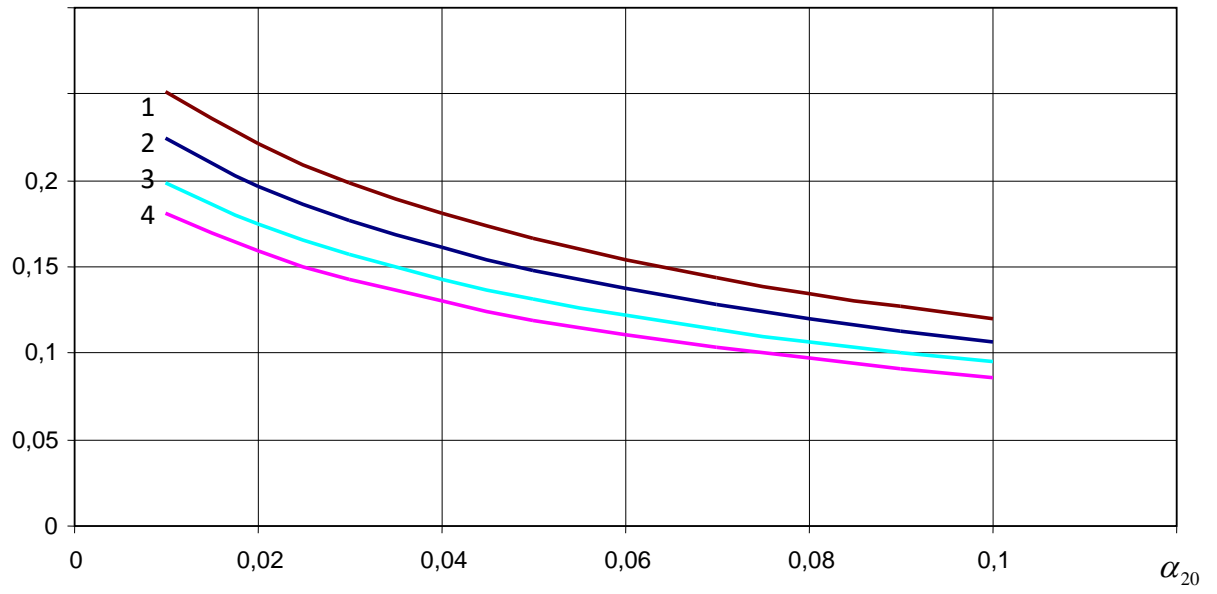
Şəkil 2.9. İkifazlı mayenin sıxlığının qabarcıqların miqdarından asılılıq qrafiki; 1-qliserin, 2-su, 3-etanol, 4-yüngül neft.



Şəkil 2.10. İkifazlı mayenin hidrodinamik təzyiqinin qabarcıqların miqdarından asılılıq qrafiki; 1-qliserin, 2-su, 3-etanol, 4-yüngül neft.



$|w| \cdot 10^{13}$



Şəkil 2.11. İkifazlı mayenin hərəkətində yerdəyişmənin qabarcıqların miqdarından asılılıq qrafiki; 1- qliserin, 2-su, 3-etanol, 4-yüngül neft.

### III FƏSİL

## ÖZLÜ-ELASTİK ÖRTÜKDƏ SIXILMAYAN QABARCIQLI MAYENİN PULSVARI HƏRƏKƏTİ

Bu fəsildə müqayisə üçün əvvəlcə daxilində ideal maye axıdılan düz oxlu elastiki izotrop örtük üçün birölçülü nəzəriyyənin əsas fərziyyələrini nəzərə almaqla, qoyulmuş məsələ, yarımsonsuz silindrik ortotrop örtük daxilində sıxılmayan mayenin pulsvari hərəkəti və daha sonra, özlü-elastik materialdan hazırlanmış örtükdə özlü sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti araşdırılır. Fəslin sonuncu paragrafının həsr olduğu dartılma effekti nəzərə alınan özlü elastik örtükdə axan özlü elastik sıxılmayan mayədə kiçik amplitudlu dalğaların yayılması məsələsinin riyazi əsaslandırılmasının təsviri oxşar tip məsələləri ümumiləşdirir və onların həlli metodlarını ümumiləşdirir.

### 3.1. Boruda axan mayədə yaranan dalğaların ətraf mühitin özlü elastik sürtünməsinə nəzərə almaqla tətqiqi

Bu paraqrafda daxilində ideal maye axıdılan düz oxlu boru üçün birölçülü nəzəriyyənin əsas fərziyyələrini nəzərə almaqla, qoyulmuş hidroelastiklik məsələsi həll edilir. Qeyd edək ki, yarımsonsuz silindrik formalı boru elastik izotrop qəbul olunur. Onun radiusunu  $R$  və qalınlığını  $h$  ilə işarə edirik. Borunun daxilində sıxlığı  $\rho_f$  olan bircins sıxılmayan mayenin olduğunu fərz edirik. Özlülüyn təsirinin nəzərdən atılması ona əsaslanır ki, sürət profilini (məsələn, iri arteriyalarda) təxmini

olaraq, müstəvi qəbul etmək mümkündür, yəni özlülüyün təsir dairəsi nazik sərhəd təbəqə daxilində mövcuddur. Borunun diametrini və yaranan dalğaların uzunluqlarını müqayisə etsək, görürük ki, birinci ikinciyə nisbətən çox kiçikdir, bu baxımdan, məsələnin mahiyyəti uzundalğalı hala baxmaqla kifayətlənməyimizə imkan verir. Artıq qeyd etdiyimiz kimi, birölçülü axın modelinə baxılır. Burada isə sürət, təzyiq, örtüyün yerdəyişməsinin radial komponenti yalnız  $x \in [0, \infty)$  oxboyu koordinatdan və  $t$  zamandan asılı olduğundan onları müvafiq olaraq,  $u = u(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$  kimi işarə edirik. Ardıcıl olaraq, kütlənin saxlanması və impuls tənliklərini verilmiş koordinatlarda yazırıq [33], [126]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1.2)$$

Yerdəyişmənin radial komponenti və borunun en kəsiyinin ölçüləri nisbəti çox kiçik olduğundan  $w/R \ll 1$ , bu fakt bizə imkan verir ki, boru divarının hərəkət tənliyini sadələşdirək [33]:

$$\rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w = \sigma \quad (3.1.3)$$

Sonuncu formulda qeyd olunmuş işarələr ümumi qəbul olunmuş işarələmələr əsasında yazılmışdır, belə ki,  $\rho_*$  – borunun sıxlığı,  $E$  – Yunq modulu,  $\nu$  - Puasson əmsalıdır. (3.1.3)- də  $\sigma$  gərginliyin ifadəsinə  $p$  –hidrodinamik (mayenin örtüyə təsiri) təzyiq və xarici mühitin yaratdığı əlavə özlü-elastik  $G^\nu \frac{\partial w}{\partial t}$  - sərtliyi nəzərə almaqla yaranan gərginliklər daxildir. İrsi elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində özlü – elastiki sərtliyin ifadəsindəki operator  $G^\nu$  aşağıdakı xəti asılılıqla ifadə olunacaq:

$$G^v = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \quad (3.1.4)$$

Sonuncu ifadədə inteqral altı  $G_0(t-\tau)$ - özlü sürtünməni ifadə edən riyazi nüvədir,  $G$  - elastik sərtliyin ölçülü parametridir. Beləliklə, borunun hərəkət tənliyini yenidən yazırıq:

$$p = \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w \quad (3.1.5)$$

Nəticədə məsələnin qoyuluşu (3.1.1), (3.1.2) və (3.1.5) tənliklərini yazmaqla yekunlaşmış oldu.

Dinamik müvazinət tənliyi. Məsələnin həlli üçün yazılmış tənliklər sistemini həll edərək, dispersiya tənliyi alaıq. (3.1.1) və (3.1.2) tənliklərindən alarıq [33]:

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.6)$$

Müəyyən riyazi çevirmələrdən sonra sonuncu tənlik aşağıdakı formanı alacaq:

$$\frac{\rho_*}{\rho_f} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{G}{\rho_f} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{G}{\rho_f} \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau + \frac{E}{\rho_f} \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.7)$$

Burada aşağıdakı işarələmələr qəbul etmişik:

$$\frac{E}{2\rho_f} = c_0^2, \quad \frac{h}{R(1-\nu^2)} = \eta, \quad \frac{\rho_*}{\rho_f} = \rho$$

Növbəti addımda yerdəyişmənin radial komponenti üçün tənlik alırıq:

$$\rho \frac{Rh}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{RG}{E} c_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{RG}{E} c_0^2 \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau + c_0^2 \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.8)$$

Təklif edilən model daha ümumidir və müəyyən hallarda daha çox əlverişlidir, belə ki, sayını azaldaraq, daha az məchulla işləmək mümkün olur. Məsələn, əgər  $G_0(t-\tau)=0$  nüvəni sıfıra bərabərləşdirsək, əhatə edən mühiti elastik hesab edə bilərik və yaxud da həmin təsiri ümumiyyətlə nəzərə almamaq üçün  $G=0$  sıfıra bərabərləşdirmək kifayət edəcəkdir.

Dinamik effektləri nəzərdən atmaqla, Moens-Kortveq dalğasının yayılma sürəti üçün formul əldə edə bilərik:

$$\tilde{c} = c_0 \sqrt{\eta}$$

Növbəti addımda rəqslərin dayanıqlı olduğu hal üçün yerdəyişməni tapaq. Bu halda Furyenin dəyişənlərinə ayrılma üsulundan istifadə edərək (3.1.8) tənliyinin xüsusi həllini aşağıdakı kimi axtaracağıq [36]:

$$w(x,t) = y(x) \exp(i\omega t) \quad (3.1.9)$$

Sonuncu ifadədə  $\omega$  – dairəvi bucaq tezliyinin verilmiş həqiqi qiyməti,  $y$  – isə ümumi halda kompleks funksiyadır. İlk olaraq, (3.1.8)-dəki inteqral həddi sadələşdirək. Bunun üçün (3.1.9) - ifadəsində  $t - \tau = \theta$  əvəzləməsi edək .

$$\alpha = \int_0^{\infty} G_0(\theta) \exp(-i\omega\theta) d\theta \quad (3.1.10)$$

kimi işarə edərək:

$$-\frac{RG}{E} c_0^2 \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau = -i \frac{RG}{E} c_0^2 \omega \alpha \exp(i\omega t) y'' \quad (3.1.11)$$

ifadəsini yazı bilərik.

Burada və bundan sonra qəbul olunub ki, ştrixlə qeyd olunmuş törəmələr  $x$  koordinatının xüsusi törəmələridir.

Elastik sərtlük üçün ölçüsüz kəmiyyət olaraq,

$$g = R\omega \frac{G}{E}$$

İşarələməsi aparsaq, ümumi eksponensial həddə görə də ixtisarlar aparıb sadələşdirsək, alarıq:

$$y'' + \frac{\omega^2}{-\rho \frac{Rh}{2} \omega^2 + ic_0^2 g(1-\alpha) + c_0^2 \eta} y = 0 \quad (3.1.12)$$

Bir sıra materiallar üçün tədqiqatlar göstərir ki,  $\rho \approx 1$  olduqda və uzundalğalı halda müəyyən etmək mümkündür ki, (3.1.12) ifadəsinin məxrəcindəki birinci hədd digərləri ilə müqayisədə çox çox kiçikdir:

$$\rho \frac{hR}{2} \omega^2 \ll c_0^2 \eta$$

Aparılan araşdırmalar belə bir fikir yürütməyə imkan verir ki, borunun en kəsiyində qravitasiya effektləri çox kiçikdir və bu da öz növbəsində (3.1.5) tənliyinin şəklini dəyişərək (3.1.13) kimi yazmağımıza kömək edir.

$$p = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau \right\} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w \quad (3.1.13)$$

Yekun olaraq aşağıdakı ikitərtibli xətti bircins diferensial tənliyi almış olarıq:

$$y'' + \frac{\omega^2}{ic_0^2 g(1-\alpha) + c_0^2 \eta} y = 0 \quad (3.1.14)$$

Tənlikdə  $y$  dəyişəninin əmsalını (3.1.15) kimi yazmaqla

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{\eta + ig(1-\alpha)}, \quad (3.1.15)$$

Həll etməli olduğumuz

$$y'' + \delta^2 y = 0 \quad (3.1.16)$$

diferensial tənliyi yaza bilərik.

Dinamik müvazinət tənliyinin həlli:

(3.1.15) formuluna daxil olan  $\alpha$ -kompleks olduğu üçün onu həqiqi və xəyali hissələrə ayıraq  $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$ :

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{(\eta + g\alpha_1) + ig(1-\alpha_0)}$$

Sonuncu ifadədən  $\delta$  kəmiyyətini tapaq:

$$\delta = \delta_0 - i\delta_1$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{m+a}{2}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{m-a}{2}}, \quad (m = \sqrt{a^2 + b^2}), \quad \text{Im}\alpha < 0 \quad (3.1.17)$$

Burada eyni zamanda, yazılışın qısalığı üçün aşağıdakı işarələmələr aparılmışdır:

$$a = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\eta + g\alpha_1}{(\eta + g\alpha_1)^2 + g(1-\alpha_0)^2}, \quad b = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{g(1-\alpha)}{(\eta + g\alpha_1)^2 + g(1-\alpha_0)^2} \quad (3.1.18)$$

(3.1.16) tənliyini həll edə bilməyimiz üçün ona sərhəd şərtləri əlavə olunmalıdır:  
 $x \rightarrow \infty$  olduqda

$$y(0) = y_0, \quad y \rightarrow 0 \quad (3.1.19)$$

Borunun koordinat başlanğıcı  $x = 0$  qəbul etdiyimiz kəsiyində  $p$  təzyiqin paylanması

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega t) \quad (3.1.20)$$

Qanunu ilə baş verir. Hələlilik  $y_0$  naməlum kəmiyyət olaraq qalır, onu növbəti addımlarda tapmaq mümkün olacaq.

(3.1.19) və (3.1.17) şərtlərini nəzərə alaraq (3.1.16) tənliyinin həllini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$w = y_0 \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.1.21)$$

təzyiqin paylanma qanunu (3.1.13) ifadəsindən alınır:

$$p = y_0 \left\{ i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta \right\} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.1.22)$$

(3.1.20) və (3.1.22) ifadələrindən isə naməlum  $y_0$  kəmiyyətini tapırıq:

$$y_0 = \frac{p_0}{i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta}$$



Onun qiymətlərindən istifadə etməklə isə istər təzyiq paylanması, istərsə də yerdəyişmənin radial komponentini əldə edərik:

$$p = p_0 \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.1.23)$$

$$w = \frac{p_0}{i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.1.24)$$

Daha sonra isə aldığımız ifadələrin köməkliyi ilə axının sürət funksiyası  $u$  təyin olunur:

$$u = i \frac{\delta}{\omega} p_0 \frac{\frac{2}{R} g c_0^2 (1-\alpha) - i \frac{2R}{R} c_0^2 \eta}{g \frac{E}{R} i(1-\alpha) + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.1.25)$$

məsələnin qoyuluşu bizə imkan verir ki, əldə etdiyimiz kompleks ifadələrin xəyali deyil, həqiqi hissələrini araşdıraq.

Ədədi hesablamə: Özlü sürtünmənin ifadəsindəki nüvə  $G_0(t-\tau)$ -ni konkret halda sadələşdirmək üçün, sabit seçək:

$$G(\theta) = g_0 = const$$

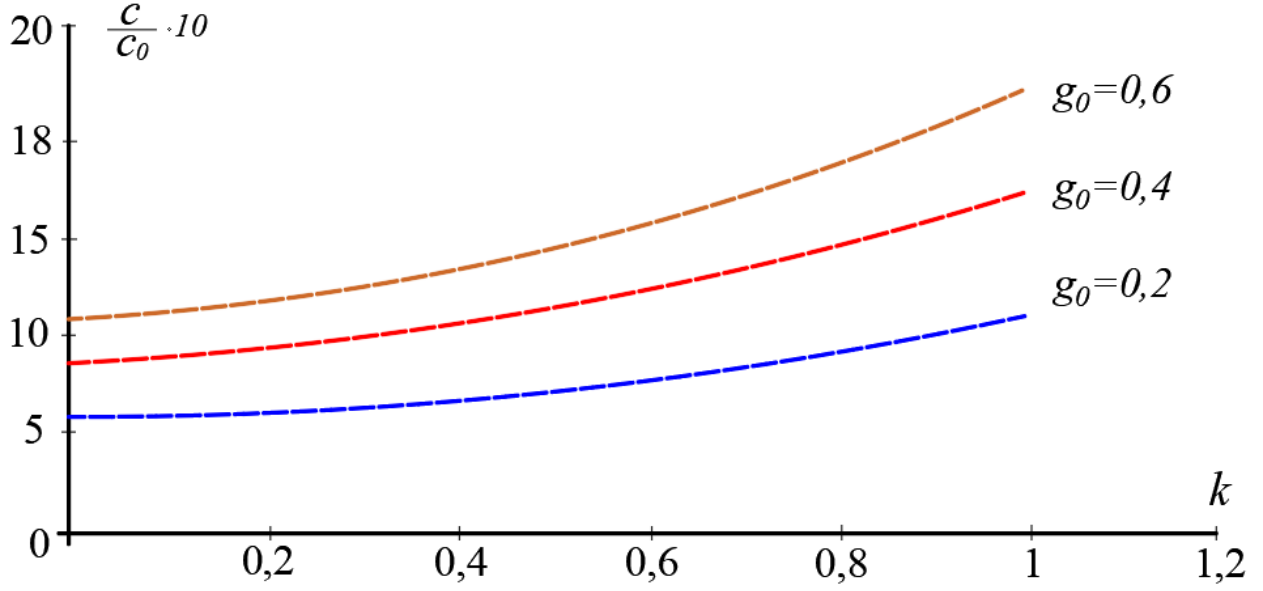
Sonuncu münasibət  $\alpha$ -nı  $g_0$  və  $\omega$  funksiyalarından asılı şəkildə göstərməyə kömək edir:

$$\alpha = -ik$$

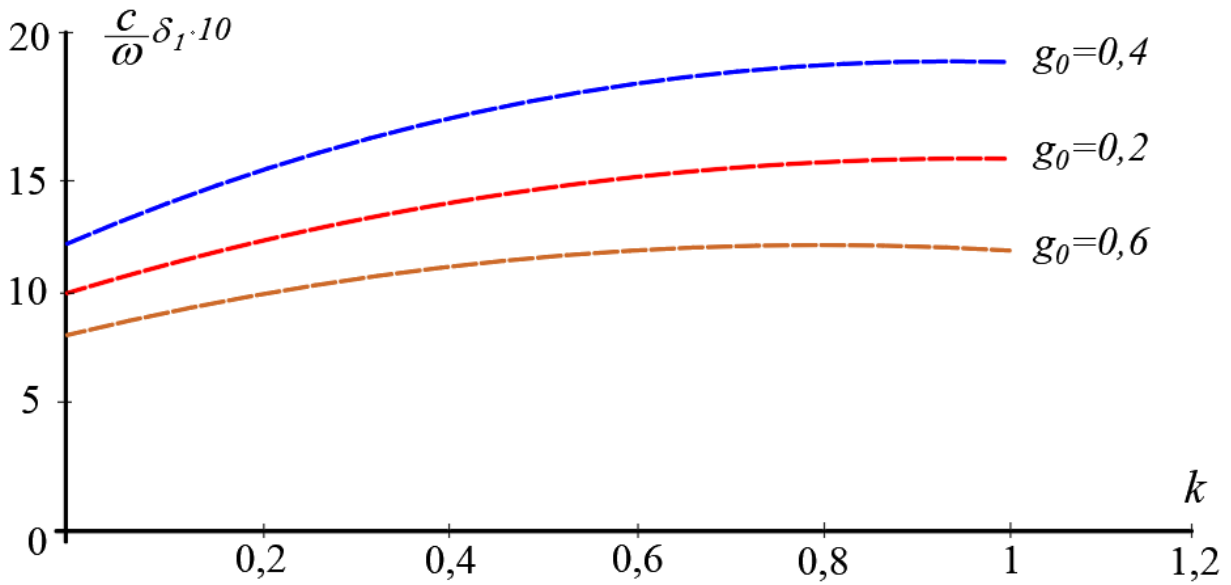
Burada  $k = g_0 \omega^{-1}$ . Bu halda  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -k$  və (3.1.18) ilə birlikdə

$$a = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\eta - gk}{(\eta - gk)^2 + g^2}, \quad b = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{g}{(\eta - gk)^2 + g^2}$$

$$g = k = 0 \text{ qiymətində } \sqrt{\eta} = \frac{c}{c_0} \approx 0,259, \quad \frac{c_0}{\omega} \delta_1 = 0$$



Şəkil 3.1. Dalğa sürətinin sərtlik əmsalından asılılığı



Şəkil 3.2. Sönmənin dalğa sürətindən asılılığı

Şəkil 3.1 və 3.2  $g_0$  –ın fərqli qiymətlərində,  $\frac{c}{c_0} = \frac{\omega}{\delta_0 c_0}$  dalğanın ölçüsüz sürətinin və  $\delta_1$  sönmənin  $k$  kəmiyyəti arasında münasibəti ifadə edir. Burada  $h/R = 5 \cdot 10^{-2}$  və  $\nu = 0,5$  olduqda  $\eta \approx 0,067$  qiymətini alır.

Beləliklə, əldə olunmuş hesabatlar nəticəsində aşağıdakı mülahizələri söyləmək olar:

- $k$  -nin artması ilə dalğanın ölçüsüz sürət parametri artır,  $k$  -nin sabit qiymətində isə sürət  $g_0$  –parametrinin artması ilə artacaq;
- $k$  -nin artması ilə sönmənin qiymətində də artım baş verir, ancaq o,  $g_0$  –in artması ilə azalır.

### **3.2. Elastik boruda özlü elastik sürtünməni nəzərə almaqla boruda axan mayədə yaranan dalğaların analizi**

Yarımsonsuz silindrik ortotrop boruda sıxılmayan mayenin pulsvari hərəkəti araşdırılır. Verilən sərhəd şərtlərində təzyiq, sürət, sıxlıq və boru divarının radial yerdəyişməsinin təyini üçün analitik düsturlar alınmışdır.

Borunun radiusu və divarının qalınlığı uyğun olaraq,  $R$  və  $h$  ilə işarə olunmuşdur.  $\rho_f$  sıxlığına malik maye bircins və sıxılmayan qəbul olunmuşdur. Özlülüyn nəzərə alınmaması fərziyyəsi daxilində sürət profilini təqribi olaraq müstəvi qəbul etmək olar [67]. Yəni özlülüyn təsiri nazik sərhəd layları ilə məhdudlaşır. Həmçinin fərz edilir ki, uzundalğalı yaxınlaşmanın tətbiqi dalğa uzunluğunun boru diametrinə nəzərən çox böyük olduğu halda mümkündür.

Birölçülü modeldə axının sürəti  $u = u(x,t)$ , təzyiqi  $p = p(x,t)$ , sıxlığı  $\rho_f = \rho(x,t)$ , boru divarının radial yerdəyişməsi  $w = w(x,t)$  kimi ifadə olunmuşdur. Deyilənlər əsasında kəsilməzlik tənliyi [114]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (3.2.1)$$

hərəkət tənliyi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.2.2)$$

şəklində yazılır. Burada  $OX$  silindrik borunun oxu boyu yönəldilmiş koordinat oxudur,  $x \in [0; \infty]$ ,  $t$  – zamandır.

Divarın materialının elastik ortotrop olduğunu fərz edirik,  $h/R \ll 1$  nisbəti ödənilir və boru ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir.  $w/R \ll 1$  şərti daxilində borunun hərəkət tənliyini yazırıq.

$$\rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_2 h}{R^2(1 - \nu_1 \nu_2)} w = \sigma \quad (3.2.3)$$

Burada  $\rho_*$  örtük materialının sıxlığı,  $E_2$  - elastiklik modulu,  $\nu_1, \nu_2$  - Puasson əmsallarıdır.

Növbəti addımda nəzərə alırıq ki,  $\sigma$  kəmiyyəti iki tip gərginlikdən ibarətdir: maye tərəfindən boruya təsir edən hidrodinamik  $p$  təzyiqi və əhatə edən xarici mühitin özlü-elastik sərtliyə malik olmasını fərz etməklə yaranan gərginlikdən təşkil olunur. Burada deyilənləri və ətraf mühitin sərtliyi elastiki olduğu halda 3.1-ci paragrafda sərtlik haqqında yürüdülmən mühakimələri nəzərə almaqla, yekun olaraq, (3.2.3) tənliyini aşağıdakı formada yazı bilərik:

$$\rho = G \frac{\partial w}{\partial t} + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_2 h}{R^2(1 - \nu_1 \nu_2)} w \quad (3.2.4)$$

Beləliklə (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) qapalı tənliklər sistemini aldıq. Tənliklər sistemini həll edərək, yerdəyişmə üçün xüsusi törəmli diferensial tənlik alırıq:

$$\frac{\rho_*}{\rho_f} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{G}{\rho_f} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{E_2 h}{p_f R^2 (1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.5)$$

Aşağıdakı işarələmələrdən sonra:

$$\frac{E_2}{2p_f} = c_0^2, \quad \frac{h}{R(1 - \nu_1 \nu_2)} = \eta, \quad \frac{\rho_*}{\rho_f} = \rho$$

(3.2.3) tənliyini yenidən yazmaq:

$$\rho \frac{Rh}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{RG}{E_2} c_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + c_0^2 \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.6)$$

Furyenin dəyişənlərə ayırma üsulundan istifadə edərək, sonuncu tənliyin həllini

$$w(x, t) = y(x) \exp(i\omega t) \quad (3.2.7)$$

şəklində axtaraq.

$$y'' + \frac{\omega^2}{(-\rho \frac{Rh}{2} \omega^2 + c_0^2 \eta) + igc_0^2} y = 0 \quad (3.2.8)$$

Burada  $y''$  ilə  $y$  –in  $x$  koordinatına nəzərən ikinci tərtib törəməsi qeyd olunub;

$g = \frac{RG}{E} \omega$  işarə edilib. Digər tərəfdən uzundalğalı hal üçün (3.2.8) ifadəsinin

məxrəcindəki I toplananı III toplanana nəzərən ata bilərik.

$$\rho \frac{Rh}{2} \omega^2 \ll c_0^2 \eta.$$

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 \eta + igc_0^2}$$

qəbul etsək,

$$y'' + \delta^2 y = 0$$

İkitərtibli xətti bircins diferensial tənlik alırıq. Alınan tənliyin həlli müvafiq formada olur:

$$y(x) = A \exp(-i\delta x) + B \exp(i\delta x)$$

Burada  $A$  və  $B$  inteqrallama sabitləridir, ümumi halda kompleks kəmiyyətlərdir və məslənin sərhəd şərtlərindən təyin olunur.

$$x = 0 \text{ olduqda } y(0) = y_0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ olduqda } y \rightarrow 0$$

$$y(x) = y_0 \exp(-i\delta x) \text{ olduqda}$$

Sonuncu ifadəni (3.2.7) bərabərliyində yazaraq [28]:

$$w(x,t) = y_0 \exp(i\omega t - i\delta x) \quad (3.2.9)$$

Burada  $y_0$  kəmiyyətini  $x=0$  qiymətində

$$p(0,t) = p_0 \exp(i\omega t) \quad (3.2.10)$$

qəbul edərək təyin edəcəyik. Bunun üçün (3.2.4) tənliyində kiçik hədləri nəzərdən atsaq:

$$p = y_0 \left\{ i \frac{gE_2}{R} + \frac{2p_f}{R} c_0^2 \eta \right\} e^{i(\omega t - \delta x)} \quad (3.2.11)$$

(3.2.11)-də (3.2.10)-nu nəzərə alsaq,  $y_0$  üçün

$$y_0 = \frac{\rho_0}{i \frac{gE_2}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta}$$

yaza bilərik. Nəticədə sürət, yerdəyişmə və təzyiq üçün aşağıdakı analitik ifadələri almış olduq:

$$u = i \frac{\delta}{\omega} p_0 \frac{\frac{2}{R} g c_0^2 - i \frac{2}{R} c_0^2 \eta}{i \frac{gE_2}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.2.12)$$

$$w = \frac{p_0}{i \frac{gE_2}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.2.13)$$

$$p = p_0 \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (3.2.14)$$

Qeyd edək ki, xəttilik şərti daxilində (3.2.12)-(3.2.14) məsələsinin yalnız həqiqi həlli maraq kəsb edir.

Ədədi eksperiment üçün

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 \eta + i g c_0^2}$$

ifadəsini həqiqi və xəyali hissələr ayıraq:

$$\delta^2 = \frac{\omega^2 \cdot \eta}{c_0^2 (\eta^2 + g^2)} - i \frac{\omega^2 \cdot g}{c_0^2 (\eta^2 + g^2)}$$

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$a = \frac{\omega^2 \cdot \eta}{c_0^2(\eta^2 + g^2)}, b = \frac{\omega^2 \cdot g}{c_0^2(\eta^2 + g^2)}$$

Bu halda

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 - i\delta_1 \\ \delta_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \\ \delta_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \end{aligned}$$

İndi isə sistemin parametrlərini daxil edək. Ortotrop örtüyün materialı üçün

$$E_2 = 4 \cdot 10^7 \frac{N}{m}, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.1, h = 0.002, \omega = 10^{-1} \text{ san}^{-1}.$$

Xarakterik ölçülər:

$$\rho_0 = 10^5 \frac{N}{m^2}, \rho_f = 10^3 \frac{kq}{m^3}$$

Dalğanın sürəti  $c = \omega / \delta_0$  və dalğanın sönməsi  $\delta_1$  – in  $g$  kəmiyyətinin müxtəlif qiymətlərindən asılılığını araşdıraq.

İlk olaraq,  $\frac{c_0}{\omega} \delta_1$  kəmiyyətinin  $g$  – dən asılılıq qrafikini quraq.

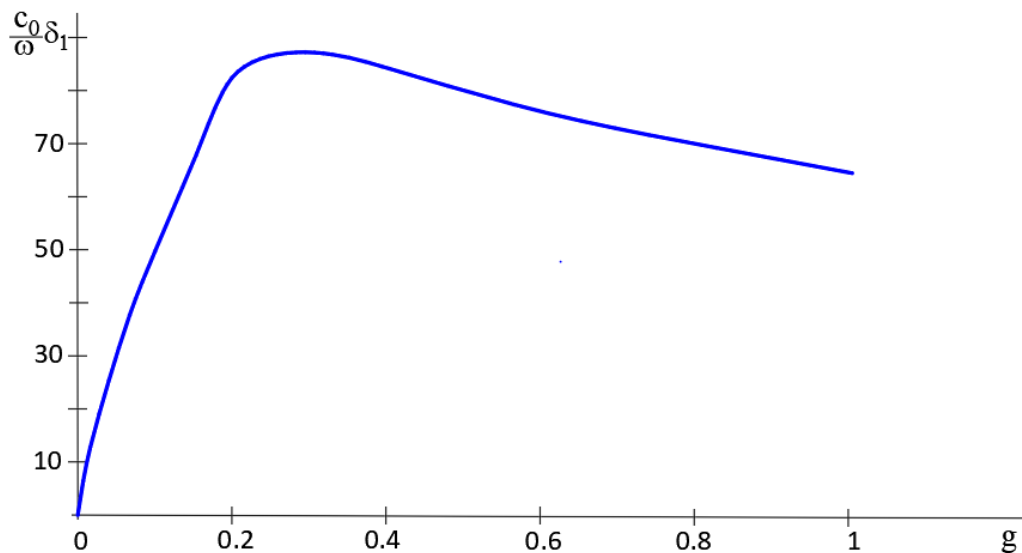
- sönmə  $g$  kəmiyyətinin qiyməti artdıqca sıfıra yaxınlaşır,
- ancaq 3.3-cü şəkildən də görüldüyü kimi sönmənin qrafikində müntəzəm azalma baş vermir. Belə ki,  $g = 0.3$  qiymətinə qədər  $g_1$  müəyyən qədər artır, bu artım nəzərə alınmayacaq dərəcədə kiçikdir.  $g = 0.3$ –dən böyük qiymətlərdə isə  $\delta_1$  azalaraq sıfıra yaxınlaşır.

Son olaraq,  $\frac{c}{c_0} = \frac{\omega}{\delta_0 c} \delta_1$  ölçüsüz sürətin  $g$  kəmiyyətindən asılılığını araşdıraq:

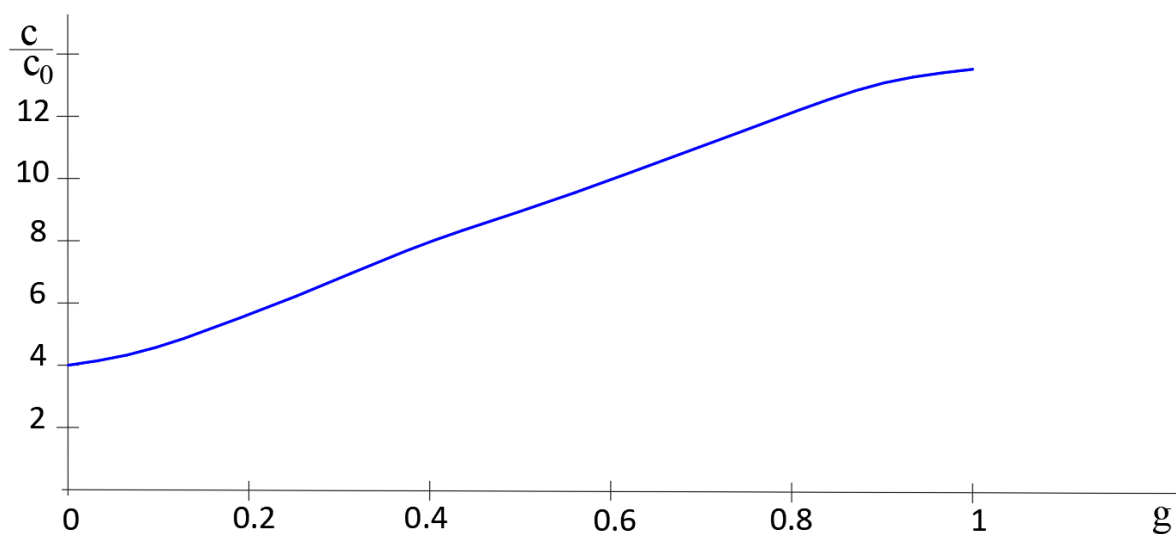
- $\delta_0$  cədvəldən də görüldüyü kimi  $g$  – nin  $0 \div 1$  aralığında artması ilə azalır,



- ölçüsüz sürət isə  $g$ -nin artması ilə artır (şəkil 3.4. Qeyd edək ki, qrafikdə göstərilən qiymətlər əyanilik üçün 1000 dəfə artırılıb). Bu artım təqribən 218% və ya təxminən 3 dəfə təşkil edir.



Şəkil 3.3.  $\frac{c_0}{\omega} \delta_1$  kəmiyyətinin  $g = \frac{RG}{E} \omega$  -dən asılılığı



Şəkil 3.4.  $\frac{c}{c_0}$  ölçüsüz sürətin  $g = \frac{RG}{E} \omega$  -dən asılılığı

$g$	$\delta_0$
0	1,7059
0,1	1,5311
0,2	1,2514
0,3	1,0404
0,4	0,8949
0,5	0,7915
0,6	0,7147
0,7	0,6554
0,8	0,6080
0,9	0,5692
1	0,5368

### 3.3. Özlü-elastik örtükdə sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti

Borunun hərəkət tənliyi. Tutaq ki, həyəcanlanmamış halda düzoxlu, silindrik,  $R$  radiuslu, qalınlığı  $h$  olan örtük verilmişdir. Örtüyün hərəkət tənliyini yazırıq. Divarın materialının özlü elastik olduğunu fərz edirik,  $h/R \ll 1$  nisbəti ödənilir və örtük ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Bu şərtlər daxilində, aşağıdakı tənliyi istifadə edək [3], [67] :

$$p = \frac{hE\nu}{(1-\nu^2)R^2} w + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.3.1)$$

burada  $\rho_*$  - divarın sıxlığıdır,  $\nu$  –Puasson əmsalıdır. (3.3.1)-ifadəsindəki irsilik operatorunu aşağıdakı şəkildə yazaq [65]:

$$E^v w = E \left\{ w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau \right\} \quad (3.3.2)$$

Burada,  $\Gamma(t - \tau)$ -zaman fərqlinin relaksasiya nüvəsidir. Əgər (3.3.2) ifadəsini (3.3.1)-də nəzərə alsaq, nəticə olaraq alarıq:

$$p = \frac{hE}{(1 - v^2)R^2} \left\{ w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w d\tau \right\} + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.3.3)$$

Bu ifadədə ikinci toplanan örtüyün inersiyasını ifadə edir. Onun təsiri birinci toplanana nisbətən kiçik olur və nəzərə alınmır. Beləliklə, hesab etmək olar ki, (2.1.1)–(2.1.3) və (2.2.2) ifadələri hidroelastikliyin qapalı sistemini təşkil edir. Bu, maye-qaz mühitlərində örtük və mayədə kiçik dalğaların yayılmasının təsviri üçün istifadə oluna bilər.

Məsələnin həlli: Məlum olduğu kimi, maye-örtük sistemində mürəkkəb impulsların təsviri üçün dalğavari hərəkətlərə xas olan harmonik həllərdən istifadə olunur. Bu zaman mürəkkəb formalı impulsları spektral olaraq sinisoidal tərkibli Furiye sırasına ayrılır. Tənliyi tərtib edərkən funksiyaların xətti və bircins olması nəzərə alınmalıdır. Dəyişənlərə ayırma üsulundan istifadə edərək, məsələnin həllini aşağıdakı şəkildə axtaraq: [4]

$$\begin{aligned} u &= u_1(x) \exp(i\omega t), & w &= w_1(x) \exp(i\omega t), \\ \rho &= \rho_1(x) \exp(i\omega t), & p &= p_1(x) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

İlk olaraq (3.3.3) ifadəsində integral həddini hesablayaq. Bunun üçün (3.3.4)-in ikinci bərabərliyindən istifadə edək. Onda

$$-\int_0^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau = -w_1(x) \int_0^t \Gamma(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Burada  $t - \tau = \theta$  əvəzləməsindən istifadə etsək yaza bilərik:

$$-w_1(x) \int_{-\infty}^0 \Gamma(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta = w_1(x) \int_0^{\infty} \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta.$$

Aşağıdakı əvəzləməni daxil etsək,

$$\alpha = \int_0^{\infty} \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \quad (3.3.5)$$

və (3.3.3) –da inersiya həddini nəzərdən atsaq, alarıq:

$$p_1 = \frac{hE}{(1-v^2)R^2} w_1(1-\alpha).$$

Analoji qayda ilə yaza bilərik:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{hEi(1-\alpha)}{(1-v^2)R^2 \rho_0 \omega} w_1'(x) \\ w_1(x) &= \frac{(1-v^2)R^2}{hE(1-\alpha)} \left\{ a^2 + \frac{\xi}{\rho_0} \omega \right\} \rho_1(x) \\ \rho_1(x) &= \frac{i\rho_0}{\omega} u_1'(x) - \frac{2\rho_0}{R} w_1(x) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Sonuncu tənlikləri bir tənliklə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$\left\{ -\frac{\xi}{\rho_0^2} + \frac{ia^2}{\rho_0 \omega} \right\} \rho_1''(x) + \left\{ \frac{1-\xi\omega^2}{\rho_0} + i \frac{2\omega(1-v^2)Ra^2}{hE(1-\alpha)} \right\} \rho_1(x) = 0$$

Bu ifadədə aşağıdakı işarəmələri qəbul etsək, (3.3.7) ifadəsini alarıq:

$$m_1 = \omega^2 \left(1 - \alpha + \frac{a^2}{c_0^2}\right), m_2 = \xi \frac{\omega^3}{\rho_0 c_0^2}, m_3 = \xi \frac{\omega}{\rho_0},$$

$$\delta^2 = \frac{m_1 + im_2}{a^2 + im_3}.$$

$$\rho_1'' + \delta^2 \rho_1 = 0 \quad (3.3.7)$$

Sonuncu tənliyi aşağıdakı formada yazı bilərik:

$$\delta^2 = k_1 - ik_2$$

burada,

$$k_1 = \frac{(m_1 a^2 + m_2 m_3) + \alpha_1 (m_1 m_3 - m_2 a^2)}{(1 - \alpha_0)(a^4 + m_3^2) + \alpha_1^2 (a^4 + m_3^2)}, k_2 = \frac{(m_1 m_3 - m_2 a^2) - \alpha_1 (m_2 m_3 + m_1 a^2)}{(1 - \alpha_0)(a^4 + m_3^2) + \alpha_1^2 (a^4 + m_3^2)}$$

$\alpha$  - nın ifadəsi  $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$  kimi yazılıb.

$\delta$ -qiyməti üçün aşağıdakı şərt qəbul olunub:

$$\text{Im} \delta < 0. \quad (3.3.8)$$

Ona görə aşağıdakı ifadəni almaq olar:

$$\delta = \delta_0 - i\delta_1.$$

Onda qarışıqda dalğanın sürəti:

$$c = \omega / \delta_0$$

olar. (3.3.7) ifadəsinin yekun nəticəsi məlumdur və aşağıdakı formada yazılır:

$$\rho = Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}$$

Sonuncu ifadədə olan  $A$  və  $B$  -inteqral sabitləridir. Bu sabitlər kompleksdir və müvafiq sərhəd şərtlərindən təyin olunur.

$$\rho(x,t) = \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (3.3.9)$$

Bu  $p = a^2 \rho + \frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$  və (3.3.6) tənliklərində (3.3.9) ifadəsini nəzərə alsaq,

müvafiq olaraq təzyiq, yerdəyişmə və sürət üçün alarıq:

$$p(x,t) = (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t)$$

$$w(x,t) = \frac{(1-\nu)R^2}{(1-\alpha)hE} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t).$$

$$u(x,t) = \frac{\delta(a^2 + im_3)}{\rho_0 \omega} \{Ae^{-i\delta x} - Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t).$$

Sərhəd məsələsinin həlli:  $p(x,t)$  təzyiqin,  $u(x,t)$  sürətin,  $\rho(x,t)$  sıxlığın,  $w(x,t)$  yerdəyişmənin növbəti ifadələri üçün boruya pulsvari təzyiq verilən zaman:

$$p(0,t) = p^\nu \exp(i\omega t) \quad (3.3.10)$$

$x=l$  olduqda təzyiq sıfıra bərabərdir:

$$p(l,t) = 0 \quad (3.3.11)$$

Sonsuz boru üçün ( $l \rightarrow \infty$ ), (3.3.8) və

$$\sin \delta l = \frac{e^{i\delta l} - e^{-i\delta l}}{2i}, \quad \cos \delta l = \frac{e^{i\delta l} + e^{-i\delta l}}{2}$$

tənliklərinə əsasən  $p(x,t)$ ,  $u(x,t)$ ,  $\rho(x,t)$ ,  $w(x,t)$  funksiyaları müvafiq formada təyin olunur:

$$\rho(x,t) = \beta \exp[(i(\omega t - \delta x))],$$

$$p(x,t) = \beta(a^2 + im_3) \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$u(x,t) = -\beta \frac{\delta}{\rho_0 \omega} (a^2 + im_3) \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x,t) = \beta \frac{(1-v^2)R^2}{(1-\alpha)hE} (a^2 + im_3) \exp[i(\omega t - \delta x)].$$

Burada aşağıdakı əvəzləmə qəbul olunub:

$$\beta = \frac{P^\vee}{a^2 + im_3}$$

Eyler formulunu tətbiq etməklə, məchul ifadələrin amplituda kəmiyyətləri aşağıdakı formaya gətirilir:

$$|\rho| = \frac{p^\vee e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_3^2}},$$

$$|p| = p^\vee e^{-\delta_1 x},$$

$$|u| = p^\vee \frac{e^{-\delta_1 x}}{\rho_0 \omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2},$$

$$|w| = p^\vee e^{-\delta_1 x} \frac{(1-v^2)R^2}{hE} \sqrt{\frac{(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^4}{((1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2)^2}}.$$

$c = \omega / \delta_0$  ifadəsinin və  $\delta_1$  kəmiyyəti ilə  $\alpha_{20}$  dəyişəni arasındakı münasibətə əsasən sonuncu ifadələr təyin olunur.

Ədədi eksperimentlər: Ədədi eksperiment üçün sistemin parametrlərini verək.

Örtüyün materialını rezin qəbul edək [5] :

$$E_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \quad \nu = 0.1, \quad h = 0.002 \text{ m}, \quad R = 0.012 \text{ m}, \quad \omega = 10^{-1} \text{ san}^{-1},$$

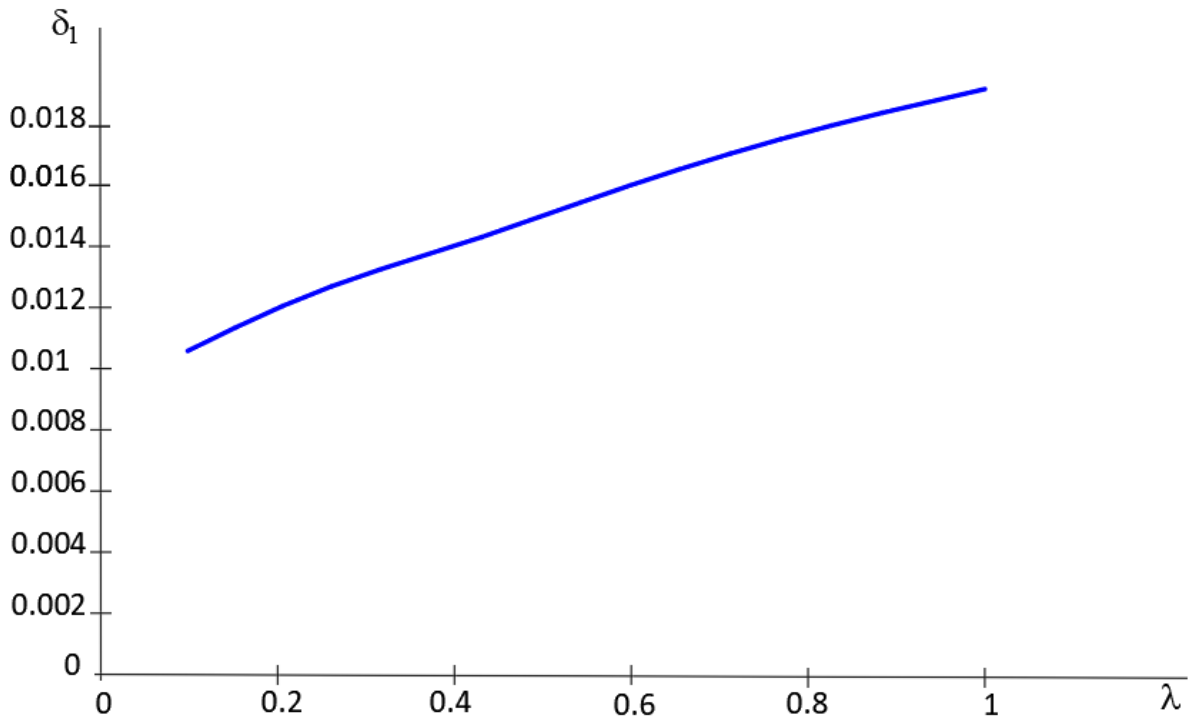
$$p^\vee = 140 \text{ N/m}^2$$

Tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan  $\alpha_{20} = \{10^{-1}\}$  su qarışığını araşdırmaq. Xarakterik ölçülər:  $\rho_0 = 10^3 \text{ kq/m}^3$ ,  $\mu = 0.11 \cdot 10^{-2} \text{ kq/m} \cdot \text{san}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Ədədi hesablamalarda, (3.3.5)-ifadəsində  $\Gamma(\theta)$  – sadəlik üçün sabit götürülür:

$$\Gamma(\theta) = \gamma$$

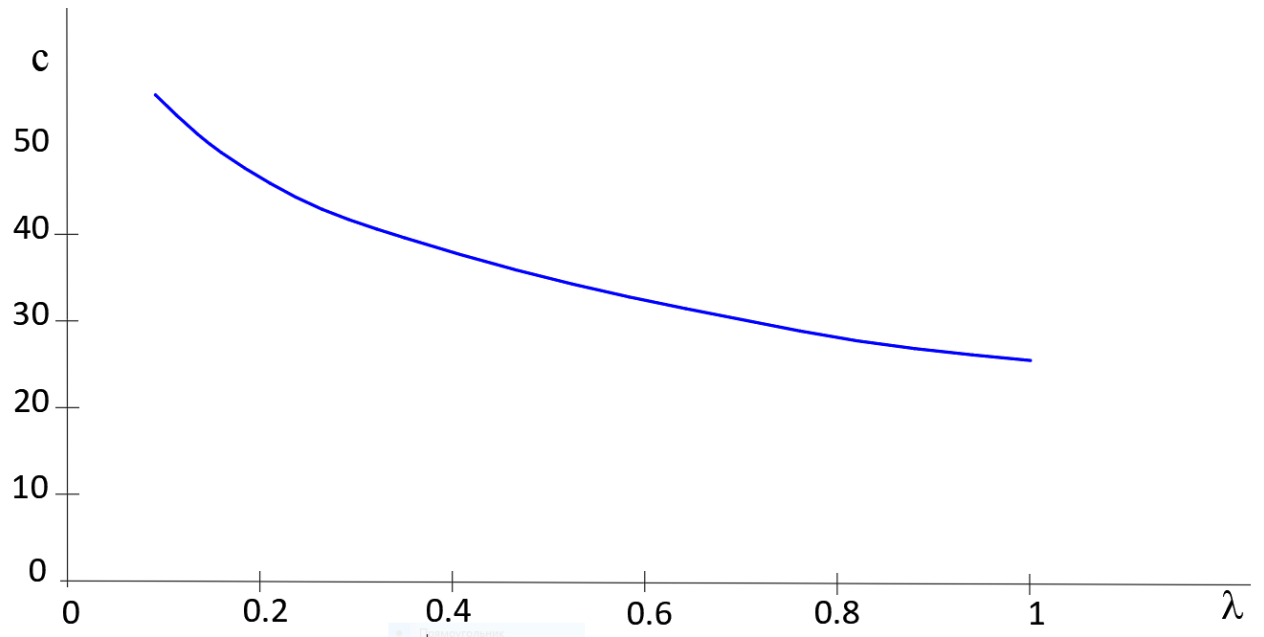
$$\alpha = \gamma \int_0^{\infty} \exp(-i\omega\theta) d\theta = \frac{-\gamma}{i\omega} e^{i\omega\theta} \Big|_0^{\infty} = \frac{\gamma}{i\omega} = -i \frac{\gamma}{\omega} = -i\lambda$$

Burada  $\lambda = \frac{\gamma}{\omega}$  işarə olunub.



Şəkil 3.5. Dalğa dekrementinin örtüyün relaksasiya nüvəsindən asılılıq qrafiki





Şəkil 3.6. İkifazlı mühitdə dalğa sürətinin örtüyün relaksasiya nüvəsindən asılılıq qrafiki.

Nəticə. Beləliklə, parametrlərin seçilmiş qiymətlərinə əsasən aşağıdakı nəticələri alarıq:

- dalğaların yayılma sürəti əhəmiyyətli dərəcədə kiçilir;
- qarışıq axın sürətinin amplitudu (və deməli sərfi) artır;
- müəyyən olunmuşdur ki, qarışıq axın xarakterinə onun özlülüyü demək olar ki, təsir etmir.

## IV FƏSİL

### SÜKUNƏTDƏ OLAN MAYE İLƏ DOLDURULMUŞ BÖYÜK UZUNLUQLU SİLİNDRİK ELASTİK ÖRTÜKDƏ KİÇİK HƏYƏCANLARIN YAYILMASI

Müasir texnoloji proseslərdə və canlı orqanizmlərdə deformasiyalanan sistemin mexaniki xüsusiyyətləri bir qayda olaraq, ətraf mühitlə təsirinin nəticəsindən asılı olur. Bu səbəbdən, örtüklərin maye ilə birgə hərəkətinin hidrodinamikası aktual məsələlərdən biridir. Bu halda mövcud olan qüvvə, deformasiyadan nəzərə çarpacaq qədər asılıdır. Bu zaman mayenin sistemə göstərdiyi təsir qüvvəsini müəyyən edərkən, sistemin öz deformasiyasını da tədqiq etmək lazımdır.

Məlumdur ki, qeyri-birfazalılıq effektləri tədqiqatı əhəmiyyətli dərəcədə mürəkkəbləşdirir və bu mürəkkəbləşmə zərbə və vibrasiya yüklərinin təsirindən yaranan dalğalara baxarkən daha kəskin təzahür edir [115], [130]. Bu cür bütöv mühitlərdə baş verən proseslərin qanunauyğunluqlarını bilmək riyazi analizin elmi əsaslarını yaratmaq üçün böyük əhəmiyyət kəsb edir [52].

Bu fəsildə nazikdivarlı izotrop elastiki sonsuz uzun dairəvi silindrik boru və daxilində özlü qabarcıqlı maye olan aerohidroelastiki sistemin pulsasiyalı hərəkəti 3D formatında tədqiq edilmişdir [87]. Maye-örtük hidroelastiki sistemdə yaranan məxsusi rəqslər nəticəsində sistemin fazalarında yayılan dalğaların forması, dalğanın sönmə dekrementi və faza sürətləri təyin edilmiş, dispersiyanın xarakterik əyriləri qurulmuşdur. Transendent cəbri tənlik şəklində alınmış dispersiya tənliyi biseksiya və ya parçanın bölünməsi üsulu ilə  $10^{-4}$  dəqiqlikdə iterasiyalar qurmaqla alınmışdır. Məsələ oxa simmetrik hal üçün həll edilmişdir. Alınmış nəticələr nazikdivarlı borunun materialı yüksək möhkəmlikli poladın müxtəlif modifikasiyalarından,

kompozit və qeyri-klassik polimer materiallardan ibarət olduğu hallar üçün, ikifazlı maye olaraq isə daşıyıcı maye olaraq su ilə birgə götürülən sferik hava qabarcıqlarından ibarət olduğu hallar üçün hesablanmışdır.

#### 4.1. Qabarcıqlı mayenin və örtüyün hərəkətinin riyazi modelləşdirilməsi

Tutaq ki, maye-qaz qarışıqlı ikifazlı mühit silindrik sonsuz örtükdə sükunətdədir. İkifazlı maye mühitə monoxromotik mərkəzdən kiçik rəqsləri ötürən qurğunu örtüyün müəyyən kəsiyində yerləşdirək. Qabarcıqlı ikifazlı maye qarışığının radiusu  $R$ , qalınlığı  $h$  olan nazikdivarlı izotrop elastiki silindrik boru ilə əmələ gətirdiyi hidroelastiki sistemin pulsvari hərəkətini tədqiq edək. İkifazlı maye mühitin ilkin təbii vəziyyətdə həyəcanlanmadığını və daşıyıcı mayenin damcılı olmasını qəbul edirik. Mayedəki kiçik həyəcanlanmaların nazik borularda yaratdığı təzyiq düşgüsü içərisi boş olan örtüklərdə olduğu kimi oxasimmetrik və oxasimmetrik olmayan dalğalar yaradır. Odur ki, “maye-örtük” hidroelastik sistemin məxsusi rəqslərinin forması və tezliyi təyin olunmalıdır.

Nazik divarlı böyük uzunluğa malik silindrik örtükdə sıxılan özlü nyuton mayesi sükunət halındadır, mayədə və örtükdə oxasimmetrik dalğaların yayılması məsələsinə baxaq. Tutaq ki, örtüyün müəyyən kəsiyində kiçik rəqslərini mayeyə ötürən porşen yerləşir. Navye-Stoksun xəttləşmiş tənliyini yazaraq,  $\frac{d\bar{u}}{dt}$ -ni  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$  ilə əvəz edək [103], [121].

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad}p + \frac{1}{3} \mu \text{grad} \text{div} \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (4.1.1)$$

Burada,  $u$  - mayenin sürəti,  $\mu$  - fluid viscosity,  $\rho_f$  - sabitdir, müvazinətdə mayenin sıxlığı,  $p$  - mayenin təzyiqidir.

Xəttiləşdirilmiş məsələdə kəsilməzlik tənliyi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_f \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Nəhayət, maye mühitin hal tənliyi [105]:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_f^2$$

Mayenin tənliklər sistemindən  $\operatorname{div} \vec{u} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f a_f^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ .

burada  $a_f$  - mayədə səsin yayılma sürətidirki,  $\alpha_{20}$  - həcmindən asılılığa malikdir.

[86], [128]:

$$a_f^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})} \cdot \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{10} - \rho_{20}} \right)^2 \frac{p_f}{\rho_{10}}$$

$p_f$  - sabit maye təzyiqidir (hidrostatik təzyiq).

$\operatorname{div}$  operatorunun ifadəsini (4.1.1) ifadəsində nəzərə alsaq, riyazi çevirmələrdən sonra hərəkətin diferensial tənliyi aşağıdakı formada alınır:

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{3\rho_f a_f^2} \operatorname{grad} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

və ya

$$\rho_f \frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{3\rho_f a_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.2)$$

$$\rho_f \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3\rho_f a_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.3)$$

Burada  $u_r$  və  $u_x$  müvafiq olaraq  $r$  və  $x$  istiqamətində maye sürətinin skalyar komponentləridir. Hərəkətin diferensial tənliyinin hər bir həddinə *div*operatorunu tətbiq edərək,  $div(grad(\cdot)) = \nabla^2(\cdot)$  ifadəsini nəzərə almaqla alarıq:

$$\rho_f \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{div} u \right) = -\nabla^2 p - \frac{\mu}{3\rho_f a_f^2} \nabla^2 \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \mu^2 \nabla^2 \vec{div} u$$

və yaxud *div*operatorununun ifadəsini nəzərə almaqla alarıq:

$$\frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p - \frac{\mu}{3\rho_f a_f^2} \nabla^2 \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\mu}{\rho_f a_f^2} \nabla^2 \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

Burada  $\nabla^2 = \Delta$  -Laplas operatorudur:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

oxa simmetrik halda isə:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Beləliklə, Nyuton mayeləri üçün xəttilləşdirilmiş tənlik:

$$\frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 \left( p + \frac{4\mu}{3\rho_f a_f^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (4.1.4)$$

Nazik divarlı düz dairəvi silindrik örtüyün oxasimmetrik hərəkət halında ətraf mühitlə kontaktını əhatə edən orta səthi boyu vahid sahədə divara normal qüvvə (təzyiq) və toxunan qüvvə təsir edir. Nazik örtüklər üçün Kirxhof-Lyav hipotezində  $h/R$  nisbəti üçün qəbul olunan qiymətlərdə ( $h/R \ll 1$ ) örtüyün oxa simmetrik hərəkət halına baxaq. Silindrik örtüyün orta səthinin porşenin yerləşdiyi kəsiyində Laqranj koordinat sisteminin başlanğıcını götürürük və koordinat oxlarını örtüklə sətərlə bağlayaq. Laqranj dəyişənlərində dairəvi en kəsikli, nazikdivarlı silindrik örtüyün oxa simmetrik hərəkətinin Kirxhof-Lyav hipotezi daxilindəki tənlikləri aşağıdakı kimi olur:

$$\rho_* h \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = p_t \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} - \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{w_r}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w_r}{\partial x} \right\} \quad (4.1.5)$$

$$\rho_* h \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = q \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) + \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w_r}{\partial x} \right\} \quad (4.1.6)$$

Qeyd edək ki, maye ilə doldurulmuş silindrik örtükdə başlanğıc halda ikifazlı birsürətli maye-qaz mühit sükunət vəziyyətində olduğundan koordinatların çevrilməsi düsturuna əsasən, Eyler və Laqranj dəyişənləri üst-üstə

düşür. (4.1.5) və (4.1.6) tənliklərdə  $w_x$ ,  $w_r$  - müvafiq olaraq borunun oxboyu və radial istiqamətdə yerdəyişməsi;  $p_t$  və  $q$  - xarici qüvvələrin radial və toxunan komponentləri;  $\rho_*$  - boru materialının sıxlığı;  $\nu$  - Poasson əmsalı;  $E$  - materialın elastiklik moduludur.

Sonrakı mərhələ isə Hidroaeroelastiklik məsələsinin sərhəd və kontakt şərtlərinin verilməsinə həsr olunur. Hidroelastikliyin qapalı riyazi sistemi və ya məsələnin riyazi modeli: (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) və (4.1.6) tənliklər sistemi hidroelastiklik məsələsinin riyazi qapalı tənliklər sistemini əmələ gətirir. Bu tənliklər sisteminin məchul funksiyaları  $p$ ,  $u_r$ ,  $u_x$ ,  $w_r$ ,  $w_x$  -lardır. Həmin məchulların birqiymətli təyin olunması üçün uyğun sərhəd və kontakt şərtləri verilməlidir.

İkifazalı maye-qaz mühitində hərəkət halında yaranan gərginliklər:

$$\sigma_{ik} = \left( -p + \lambda_1 \operatorname{div} \vec{u} \right) \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} \quad (4.1.7)$$

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (4.1.8)$$

burada  $\delta_{ik}$  - Kroneker simvoludur və sonuncu ifadə deformasiya sürəti tenzorunun komponentlərini ifadə edir. Özlü mayelər üçün qəbul olunub ki,  $\mu_1 = \mu$  və  $\lambda_1 = -\frac{2}{3}\mu$ . Bu şərtlərə əsasən, ikifazalı qarışıqın normal  $\sigma_{rr}$  və toxunan  $\sigma_{rx}$  gərginliklərinin təsiri (axın oxasimmetrik olduğu üçün  $\sigma_{r\theta} \equiv 0$ ) örtüyün daxili səthində xarici qüvvənin radial  $p_t$  və toxunan  $q$  toplananları ilə (oxasimmetrik məsələyə baxdığımız üçün toxunma səthində qövsboyu xarici qüvvə yaranmır) müvazinətləşdirilməlidir. Başqa sözlə, tənliklər sisteminin həlli üçün müvafiq dinamik kontakt şərtlər və sızmanın yaranmadığını və ya örtüyün divarından hamar axmanı ehtiva edən kinematik sərhəd şərtlərini ödəməlidir:

$$p_t = -\sigma_{rr}|_{r=R-h/2} = -\left(-p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \quad (4.1.9)$$

$$q = -\sigma_{rx}|_{r=R-h/2} = -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}\right) \quad (4.1.10)$$

Həmçinin həmin səth boyu kinematik sərhəd şərtləri doğru olur:

$$\begin{aligned} u_r|_{r=R} &= \frac{\partial w_r}{\partial t} \Big|_{r=R}, \\ u_x|_{r=R} &= \frac{\partial w_x}{\partial t} \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

## 4.2. Hidroelastiklik məsələsinin riyazi həlli

Maye-qaz homogen özlü mühitin xəttiləşdirilmiş (4.1.4) dalğa tənliyinin həllini sönən dalğalar sinfində olduğu kimi, Füryenin dəyişənlərinə ayrılan funksiyların hasili olmaqla aşağıdakı şəkildə axtarıyıq:

$$p = \operatorname{Re}\{p^*(r)e^{kx+i\omega t}\}$$

Sonuncu asılılığı (4.1.4) tənliyində yazaraq sadə riyazi çevirmələr apararaq, nəticədə təzyiğin radial koordinatdan asılılığını verən Bessel tənliyi alınır [54]:

$$\frac{d^2 p^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp^*}{dr} + p^* \lambda^2 = 0 \quad (4.2.1)$$

Burada,



$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{R^2 \left( 1 + i \frac{4\mu\omega}{3\rho_f R^2} \right)} - k^2$$

işarə olunub.

(4.2.1)- tənliyinin həlli Bessel funksiyalarının superpozisiyası şəklində aşağıdakı formada olur [131]:

$$p^* = p_0 J_0(\lambda r) + C_0 Y_0(\lambda r)$$

Burada  $J_0(\lambda r)$  və  $Y_0(\lambda r)$  müvafiq olaraq birinci və ikinci növ Bessel funksiyalarıdır. Məsələnin fiziki mahiyyətinə əsasən  $p^*(r)$ -in  $r=0$  olduqda sonlu qiymət aldığı səbəbindən  $C_0=0$  olmalıdır, odur ki,

$$p^*(r) = p_0 J_0(\lambda r) \quad (4.2.2)$$

Mayenin sürətinin  $r$  və  $x$  istiqamətlərində skalyar komponentləri  $u_r$  və  $u_x$  Navye-Stoks tənliklərindən təzyiq funksiyasında olduğu kimi:

$$u_r = \operatorname{Re}\{u_r^*(r) e^{kx+i\alpha t}\} \quad (4.2.3)$$

$$u_x = \operatorname{Re}\{u_x^* e^{kx+i\alpha t}\} \quad (4.2.4)$$

(4.1.2) və (4.1.3) tənliklərini (4.1.1)-də nəzərə almaqla

$u_r^*$  və  $u_x^*$  üçün ala bilərik:

$$u_r^* = A J_1(\beta r) - \frac{p_0 \lambda \left( 1 + i \frac{\omega \mu}{3\rho_f a_f^2} \right)}{\mu(\beta^2 - \lambda^2)} J_1(\lambda r) \quad (4.2.5)$$

$$u_x^* = BJ_0(\beta r) - \frac{ip_0 k \left(1 + i \frac{\omega \mu}{3\rho_f a_f^2}\right)}{\mu(\beta^2 - \lambda^2)} J_0(\lambda r) \quad (4.2.6)$$

burada

$$\beta^2 = -\left(k^2 + i \frac{\rho_f \omega}{\mu}\right) \quad (4.2.7)$$

işarə olunan kompleks ədəddir.

Alınmış tənliklərdə  $p_0$ ,  $A$  və  $B$  məchul ədədlərdir, onların qiymətləri örtüyün hərəkətinin diferensial tənliklərinin həlləri ilə məsələnin sərhəd və kontakt şərtlərindən təyin olunur.

Maye mühitin hal tənliyini (4.2.3) və (4.2.4) tənliklərini kəsilməzlik tənliyində nəzərə alsaq:

$$B = -\frac{i\beta}{k} A \quad (4.2.8)$$

Beləliklə dörd məchuldan biri aradan qaldırılır.

Tənlikləri ölçüsüz hala gətirək. Bunun üçün istifadə edəcəyimiz parametrlər aşağıdakılardır:

$$\frac{p_t}{\rho_*} = \bar{p}_t a_t^2 \bar{h}, \quad h = \bar{h} R, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{R \rho_f a_f}, \quad t = \frac{R \bar{t}}{a_t}, \quad x = R \bar{x}, \quad \frac{q}{\rho_*} = \bar{q} a_t^2 \bar{h}, \quad K = k R, \quad w_r = R \bar{w}_r,$$

$$w_x = R \bar{w}_x, \quad u_r^* = \bar{u}_r^* a_f, \quad u_x^* = \bar{u}_x^* a_f, \quad a_t^2 = \frac{E}{\rho_* (1-v^2)}, \quad \eta = \frac{2}{1-v^2}, \quad \rho = \frac{\rho_f}{\rho_*}, \quad \bar{\omega} = R \omega / a_f, \quad \bar{\beta} = \beta R,$$

$$\bar{\lambda} = \lambda R, \quad \bar{r} = r/R, \quad \bar{A} = A/a_f, \quad \bar{p}^* = p^* / \rho_f a_f^2, \quad \bar{p}_0 = p_0 / \rho_f a_f^2, \quad \bar{t}_t = \frac{a_t t}{R}, \quad \bar{\omega}_t = R \omega / a_t, \quad \zeta = \frac{1}{12} \bar{h}^2$$

Maye təzyiqi və sürəti üçün yekun ifadə aşağıdakı formada olur:

$$\begin{aligned}\bar{p}^* &= \bar{p}_0 J_0(\bar{\lambda}\bar{r}) \\ \bar{u}_r^* &= J_1(\bar{\beta}\bar{r})\bar{A} - i \frac{\bar{\lambda}\bar{\omega}J_1(\bar{\lambda}\bar{r})}{K^2 + \bar{\lambda}^2} \bar{p}_0 \\ \bar{u}_x^* &= i \frac{\bar{\beta}}{K} J_0(\bar{\beta}\bar{r})\bar{A} - \frac{K\bar{\omega}J_0(\bar{\lambda}\bar{r})}{K^2 + \bar{\lambda}^2} \bar{p}_0 \\ \bar{\beta}^2 &= -(K^2 + i \frac{\bar{\omega}}{\bar{\mu}}) \\ \bar{\lambda} &= -K^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{\left(1 + i \frac{4\bar{\mu}\bar{\omega}}{3}\right) - K^2}\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

Burada  $a_t$ -boruda səsin yayılma sürətidir.

Örtüyün tənliyi ölçüsüz halda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{p}_t \left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{x}^2} - \bar{w}_r - \nu \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{q} \left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \nu \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{x}}.\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Örtüyün nöqtələrinin yerdəyişməsi örtük daxilindəki mayenin həyəcanlanmış hərəkətinin modası ilə axtarılır. Odur ki yerdəyişmələrin radial və oxboyu

komponentləri radial koordinatın funksiyası ilə oxboyu koordinat və zamanın birlikdə funksiyasının hasili kimi axtarılır:

$$\begin{aligned}\bar{w}_r &= \bar{w}_r^* e^{i(Kx + \bar{\omega}_t t)} \\ \bar{w}_x &= \bar{w}_x^* e^{i(Kx + \bar{\omega}_t t)}\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

Örtüklə mayenin birgə hərəkətinin mümkün olması üçün örtüyün səthində təsir edən sürüşmə gərginliyi  $\bar{q}$  və normal gərginlik  $\bar{p}_t$   $\bar{r} = 1 - \bar{h}/2$  toxunma səthində mayenin  $\bar{\sigma}_{rx}$  və  $\bar{\sigma}_{rr}$  gərginlikləri ilə ifadə olunmalıdır

$$\begin{aligned}\bar{p}_t &= -\bar{\sigma}_{rr} \Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} = -\left[ -\bar{p}^* - \frac{2\mu}{3} \left( \bar{u}_x^* (iK) + \frac{\bar{u}_r^*}{\bar{r}} \right) + \frac{4\mu}{3} \frac{\partial \bar{u}_r^*}{\partial \bar{r}} \right] \Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} e^{i(K\bar{x} + \alpha t)} \\ \bar{q} &= -\bar{\sigma}_{rx} \Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{u}_x^*}{\partial \bar{r}} + (iK) \bar{u}_r^* \right) \Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} e^{i(K\bar{x} + \alpha t)}\end{aligned}$$

və ya

$$\begin{aligned}\bar{p}_t &= \bar{p}_t^* e^{i(K\bar{x} + \alpha t)} \\ \bar{q} &= \bar{q}^* e^{i(K\bar{x} + \alpha t)}\end{aligned}\quad (4.2.12)$$

(4.2.12) və (4.2.11) tənlikləri (4.2.10)-da nəzərə almaqla,

$$\begin{aligned}\bar{w}_r^* &= \bar{p}_t^* \frac{1 - \bar{h}/2}{\Phi} + \bar{q}^* \frac{\theta}{\Phi} \\ \bar{w}_x^* &= \bar{p}_t^* \frac{(-iK(1 - \bar{h}/2)\nu)}{\Phi(-K^2 + \bar{\omega}_t^2)} + \bar{q}^* \frac{[-i\nu K\theta + \Phi(1 - \bar{h}/2)]}{\Phi(-K^2 + \bar{\omega}_t^2)}\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

burada

$$\begin{aligned}\Phi &= 1 - \bar{\omega}_i^2 + \frac{v^2 K^2}{(-K^2 + \bar{\omega}_i^2)} - \frac{\xi K^2 (-K^2 + \bar{\omega}_i^2)}{1 - \eta \xi (-K^2 + \bar{\omega}_i^2)} \\ \theta &= 1 - \bar{\omega}_i^2 + \frac{i v K (1 - \bar{h}/2)}{(-K^2 + \bar{\omega}_i^2)} - \frac{i \bar{h} K (1 - \bar{h}/2)}{2(1 - \eta \xi (-K^2 + \bar{\omega}_i^2))}\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

Örtüyün hərəkət tənliyinin həlli ilə maye hərəkətinin tənliklərinin həllini uzlaşdırmaq üçün aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətlər arasındakı bərabərliklərdən istifadə edilir.

$$\begin{aligned}\gamma \bar{\omega} &= \bar{\omega}_i \\ \frac{1}{\gamma} \bar{\omega} &= \bar{t}_i\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

burada

$$\gamma = a_f / a_i$$

Örtüklə mayenin birgə hərəkətinin mümkün olması üçün örtüyün səthində təsir edən sürüşmə gərginliyi və normal gərginlik  $\bar{r} = 1 - \bar{h}/2$  toxunma səthində özlü maye üçün Nyuton qanununa əsasən təyin olunan normal və toxunan gərginliklərə bərabər olur:

$$\begin{aligned}\bar{p}_i^* &= -\frac{\alpha \gamma^2}{\bar{h}} \bar{\sigma}_{rr}^*, \quad \bar{r} = 1 - \bar{h}/2 \\ \bar{q}^* &= -\frac{\alpha \gamma^2}{\bar{h}} \bar{\sigma}_{rx}^*, \quad \bar{r} = 1 - \bar{h}/2\end{aligned}\quad (4.2.16)$$

burada

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}^* & \Big|_{\bar{r}=1-\frac{\bar{h}}{2}} = \left[ -\bar{p}^* - \frac{2}{3}\bar{\mu} \left( iK\bar{u}_x^* + \frac{\bar{u}_r^*}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{u}_r^*}{\partial \bar{r}} \right) + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_r^*}{\partial \bar{r}} \right]_{\bar{r}=1-\frac{\bar{h}}{2}} \\ \bar{\sigma}_{rx}^* & \Big|_{\bar{r}=1-\frac{\bar{h}}{2}} = \bar{\mu} \left( \frac{\partial \bar{u}_x^*}{\partial \bar{r}} + iK\bar{u}_r^* \right) \Big|_{\bar{r}=1-\frac{\bar{h}}{2}} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$\bar{p}^*, \bar{u}_r^*, \bar{u}_x^*$ -in ifadələri (4.2.9).bərabərliklərindən götürülür. Beləliklə, (4.2.9)-bərabərliklərini (4.2.17) münasibətlərində və alınmış nəticələri (4.2.16)-da yazırıq. Örtüyün yerdəyişmə komponentlərinin ifadələrində (4.2.15)-dən  $\bar{p}_t^*$  və  $\bar{q}^*$  üçün alınmış ifadələri (4.2.13) tənliklərində nəzərə alırıq.  $\bar{w}_r^*$  və  $\bar{w}_x^*$  üçün alınmış asılılıqları kinematik kontakt şərtlərində ( $\bar{r}=1-\frac{\bar{h}}{2}$  səthində ) yazıb, uyğun riyazi əməliyyatları yerinə yetirməklə sonuncu cəbri tənliklər sistemini alırıq. Kinematik kontakt şərtləri ilə dinamik kontakt şərtləri iki mürəkkəb xətti bircins cəbri tənliklər sisteminə gətirir.

$$\begin{aligned} c_{11}\bar{A} + c_{12}\bar{p}_0 &= 0 \\ c_{21}\bar{A} + c_{22}\bar{p}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

### 4.3. Ədədi nəticələrin alınması və analizi

Kompleks kəmiyyətlər olan  $\bar{A}$  və  $\bar{p}_0$  məchulları (4.2.18) tənliklərinin qeyri trivial həllinə bərabər olmalıdır. Əmsallardan ibarət matrisin determinantının sıfır olması şərti tənliklər sisteminin qeyri trivial həllini verir. Determinantın sıfır olması şərti dispersiya münasibətini verir [108]. Dispersiya tənliyinin həlli sabit  $K$  məchul dalğa ədədinin təyin olunmasına gətirir. Tənliyin əmsalları  $K$  dalğa ədədi ilə bərabər

mayenin və örtüyün ölçüsüz fiziki , mexaniki, həndəsi, kinematik və dinamik parametrləri daxil olan sabitlərdən ibarətdir.

$$\det \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.1)$$

Məsələ ölçüsüz formada həll edilsə də, aydınlıq üçün ədədi nəticələr və müzakirələri ölçülü formada göstərmək üçün, tənliyi həll edərkən qabarcıqların həcmindən asılı olaraq kompleks ədəd tapırıq.

$$K = K_R + iK_i \text{ və } \omega = \omega_R + i\omega_i, \quad K_R = \operatorname{Re} K, \quad K_i = \operatorname{Im} K$$

Birinci növ dalğalar adlanan  $K_R$  - dalğalar halında  $K_* = K_R$  müsbət həqiqi ədəd olur,  $K_R > 0, K_i = 0$  [114], [96]. İxtiyari  $K_R$  üçün cəbri tənlikdən dörd kompleks  $\omega(K_R)$  ədədləri alınır. Bu ədədlər  $x$ koordinatına görə dəyişən (qərarlaşmış hərəkət halında sinusoidal dəyişən) və zamana görə isə eksponensial qanunla azalan həyəcanlanmalara uyğun olur.  $K_R$  - rəqslərin koordinata görə dekrementi və ya dalğanın uzunluğa görə sönməsinin göstəricisi olur.  $K_i$  - dalğalar isə koordinata görə sinusoidal, zaman görə eksponensial sönən olur.

$$a(K) = -\frac{\omega(K)}{K_i}, \quad L(K) = -\frac{2\pi}{K_i}.$$

İkinci növ dalğalar və ya  $\omega_R$  dalğalar halında dispersiya tənliyinin həlləri  $\omega = \omega_R$  həqiqi müsbət ədəd olduğundan  $\omega > 0, \omega_i = 0$ . İxtiyari verilmiş  $\omega$  üçün dörd ədəd kompleks  $K(\omega)$  ədədləri alırıq. Bu dalğalar məsələdə maye-örtük sisteminin  $x=0$  kəsiyində xarici mənbə tərəfindən yaradılır.  $K_i(\omega)$  rəqslərin dekrementi və

ya rəqslərin oxboyu böyüməsini xarakterizə edir. Alınmış həllərdə  $K_R(\omega) < 0$  olarsa, rəqslərin fazası  $a(\omega)$  sürəti ilə yayılır ( $a(\omega) > 0$ ).

$K_i > 0$ ,  $K_R < 0$  və  $K_i < 0$ ,  $K_R > 0$  halları rəqs fazalarının və faza sürətinin yayılması istiqamətindəki həyəcanlandırma amplitudu sönən rəqs rejimlərinə uyğun olur.  $L \rightarrow 0$ ,  $K_R \rightarrow \infty$  - qısa dalğalar,  $L \rightarrow \infty$ ,  $K_R \rightarrow 0$  - uzun dalğalar prosesin limit halını xarakterizə edir.  $\omega$ - dalğalar zamana görə harmonik, uzunluğa görə isə eksponensial dəyişən amplitudlu dalğalar olur.

$$a(\omega) = -\frac{\omega}{K_R(\omega)}, \quad L(\omega) = -\frac{2\pi}{K_R(\omega)},$$

uyğun olaraq faza sürəti və dalğa uzunluqlarıdır.

İkifazlı mühit olan qabarcıqlı mayelərin birsürətli hərəkət rejimlərində yaranan rəqslər yayılma istiqaməti boyu sönən akustik həyəcanlanmalar olur.

Tədqiqatın əsas məqsədi maye qarışığındakı qabarcıqların həcm konsentrasiyasından və hidroelastik sistemin xarakterik həndəsi və təcrübi-fiziki parametrlərindən asılı olaraq naməlum dalğa ədədinin qiymətini müəyyən etmək, həmçinin asılılığını müəyyən etməkdir. Dispersiya tənliyinin həlli mürəkkəb cəbri tənlik olduğundan kompüterdə (PC) xüsusi Matlab proqramından istifadə etməklə ədədi üsulla alınır. Biz  $x$  oxunun müsbət istiqaməti boyu yayılan dalğaları araşdıracağıq. Hidroelastik sistemdə dalğaların yayılmasının iki müxtəlif rejimi əmələ gəlir: qaz-maye qarışığında dalğalar və elastik örtükdə dalğalar. Mayenin hərəkəti rejimi üçün bir neçə hallar nəzərdən keçirilmişdir: qeyri özlü, özlü və maye-qaz qarışığının həyəcanlanmaların yayılma sürətləri ilə faza sürətlərinin bərabər olan haldakı hərəkəti. Elastik örtükdə dalğaların yayılması rejimi üçün müxtəlif sərtliyə malik materiallar, metal - polad, mis, yüksək və orta sərtliyə malik alüminium, eləcə də aşağı sərtliyə malik qeyri-klassik polimer materiallar seçilmişdir.



Xüsusi hallarda mayedəki qabarcıqların həcmi konsentrasiyası çox kiçik olduğu hallarda  $a_f^2 = \frac{p_f}{a_{20}\rho_{10}}$  səsin maye-qabarcıq qarışığında sürətinin və həmçinin maye sıxılmayan faza olduqda qabarcıqların sıxılmasının nəzərə alınmadığı limit halında  $div \bar{u} \approx 0 (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij})$  alınmış məlum nəticələr təsdiq olunur. Qaz qabarcıqlarının həcmi konsentrasiyası çox kiçik olduqda  $p_f = (1 - \alpha_{20})p_{01} + \alpha_{02}p_{02} \approx p_{01}$  limit halında sıxılmayan maye və qaz qabarcıqları olan ikifazlı maye-örtük sistemində dispersiya tənliyi

$$\begin{vmatrix} \left( -\frac{K^2}{\eta} - 1 + \bar{\omega}_t^2 \right) & -i\nu K \\ \frac{\rho a_f^2}{\bar{h} a_t^2} \bar{\mu} K \bar{\omega}_t \left( 1 - \frac{\bar{h}}{2} \right) + i\nu K & -K^2 + \bar{\omega}_t^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.2)$$

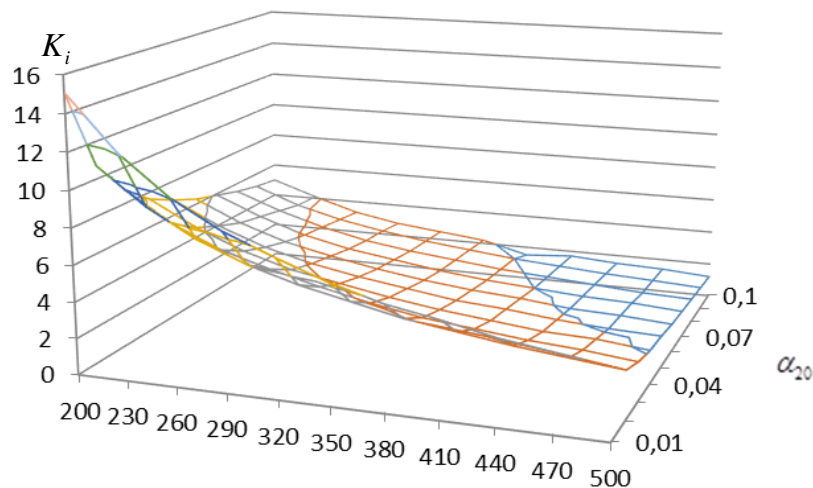
və ya

$$\frac{1}{\eta} K^4 + \left\{ -\bar{\omega}_t^2 - \nu^2 + 1 - \frac{\bar{\omega}_t^2}{\eta} + i \frac{\rho a_f^2}{\bar{h} a_t^2} \bar{\mu} \nu \bar{\omega}_t \left( 1 - \frac{\bar{h}}{2} \right) \right\} K^2 + \bar{\omega}_t^4 - \bar{\omega}_t^2 = 0. \quad (4.3.3)$$

Yuxarıda göstərilən nəzəriyyə və həll metodunun bir nümunəsi olaraq, işdə metallardan və polimer materiallardan hazırlanmış örtüklər modelləri nəzərdən keçirilir. Məsələnin ədədi hesablamaları üçün eksperimental məlumatlara uyğun sistemin parametrlərini təyin edilir:

$$\nu = 0.3; \omega = 0.1 \text{sec}^{-1}; h = 0.002 \text{m}; R = 0.012 \text{m}; \mu = 0.00163 \text{kg/m} \cdot \text{sec}; p_f = 10^5 \text{Pa};$$

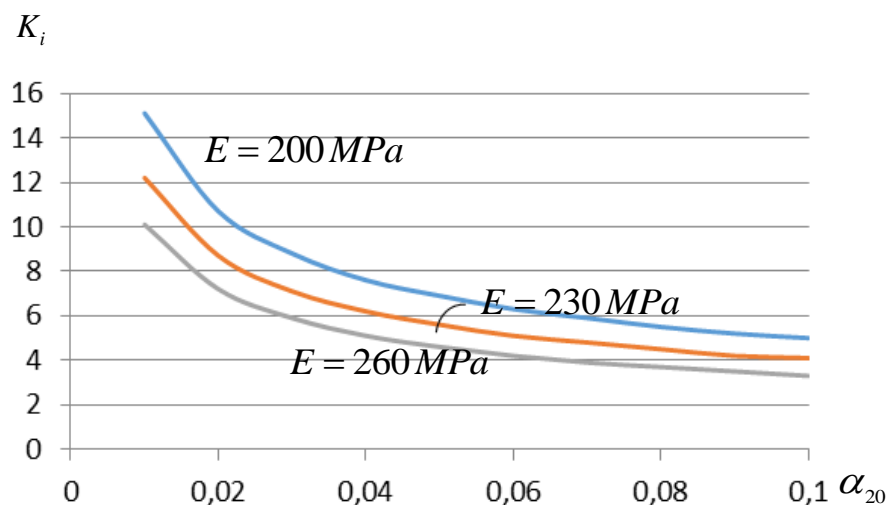
$$\alpha_{20} = 0.01 \div 0.1.$$



*E*

Şəkil 4.1. *K*-nın qabarcıqların konsentrasiyasından və elastiklik modulundan asılılıq qrafiki.

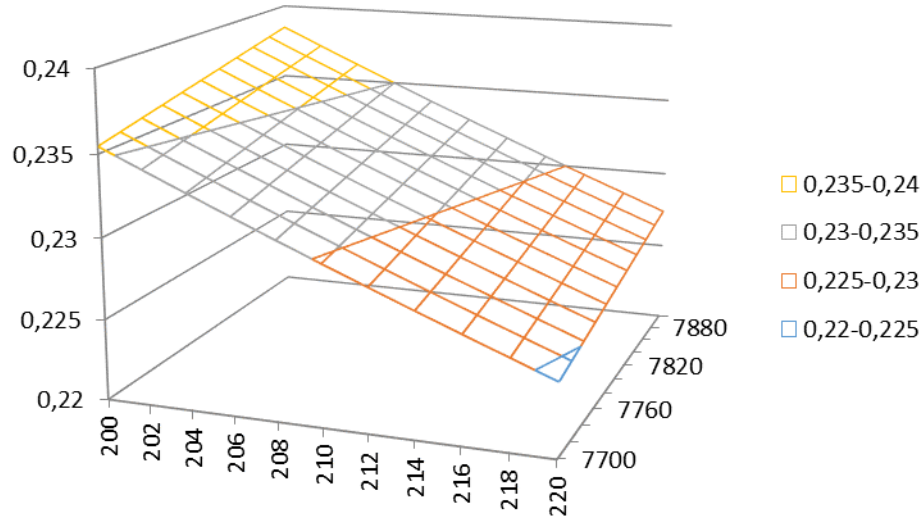
Qrafikdən görünür ki, borunun materialının sərtliyinin kiçik qiymətlərində rəqslərin koordinata görə dekrementinin (*K*) konsentrasiya əmsalından asılılığı qabarıq hiss olunur və konsentrasiya əmsalı artdıqca *K*-nın qiymətləri kiçilir. Həmçinin, mayenin tərkibində qabarcıqların miqdarı çoxaldıqca, rəqslərin dekrementinin qiymətləri arasındakı fərq getdikcə azalır. Məsələn, əgər  $\alpha_{20} = 0.01 \div 0.02$  olduqda, *K*-nın qiymətləri arasındakı fərq təqribən 29% təşkil edirsə,  $\alpha_{20} = 0.09 \div 0.1$  olduqda, bu fərq 6% təşkil edir. Elastiklik modulunun daha böyük qiymətlərində dalğa uzunluğuna görə rəqslərin sönmə göstəricisi qabarcıqların mayedəki konsentrasiyasından zəif asılı olur.



Şəkil 4.2.  $E = 200 \text{ MPa}$ ;  $E = 230 \text{ MPa}$ ;  $E = 260 \text{ MPa}$ ,  $\rho_* = 920 \text{ kg/m}^3$  qiymətləri üçün  $K_i$ -nin qabarcıqların konsentrasiyasından asılılığı.

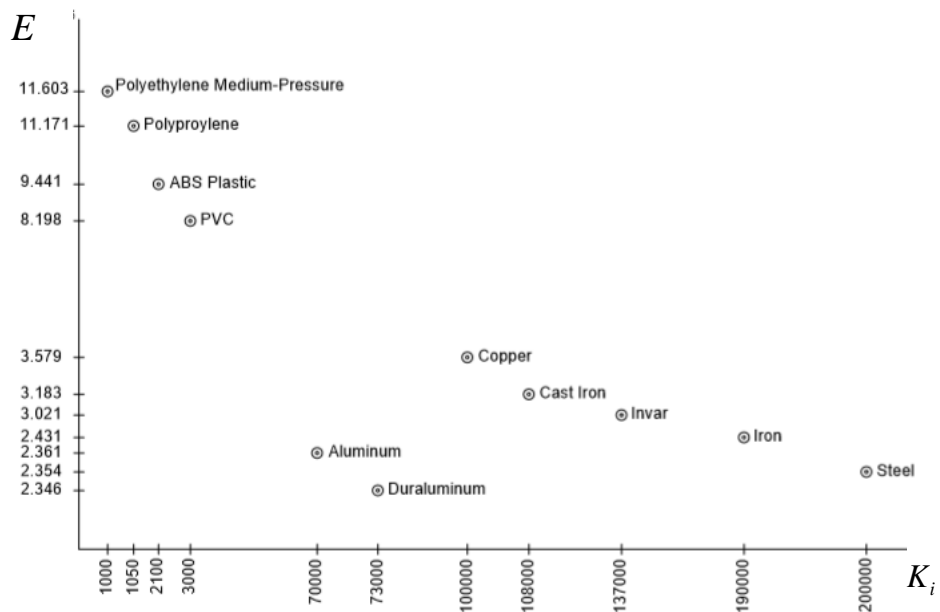
Qrafik 4.2-dən göründüyü kimi sərtliyi nisbətən böyük olan borularda *K*-nın qiymətləri qabarcıqların konsentrasiya əmsalından asılı olaraq, sərtliyi kiçik olanlara nisbətən, kiçik olur. Borunun materialının sərtliyi sonsuz böyüdükcə, rəqslərin koordinatlara görə dekrementinin qabarcıqların konsentrasiya əmsalından asılılığı zəifləyir və getdikcə asılılıq itir;  $\alpha_{20} = 0.01 \div 0.1$  üçün demək olar ki, sabit qalır.

Aşağıdakı qrafikdə yüksək möhkəmlikli xüsusi poladın müxtəlif modifikasiyalarından hazırlanmış borularda,  $K_i$ -nin örtük materialının sıxlığından asılı dəyişməsi göstərilmişdir.



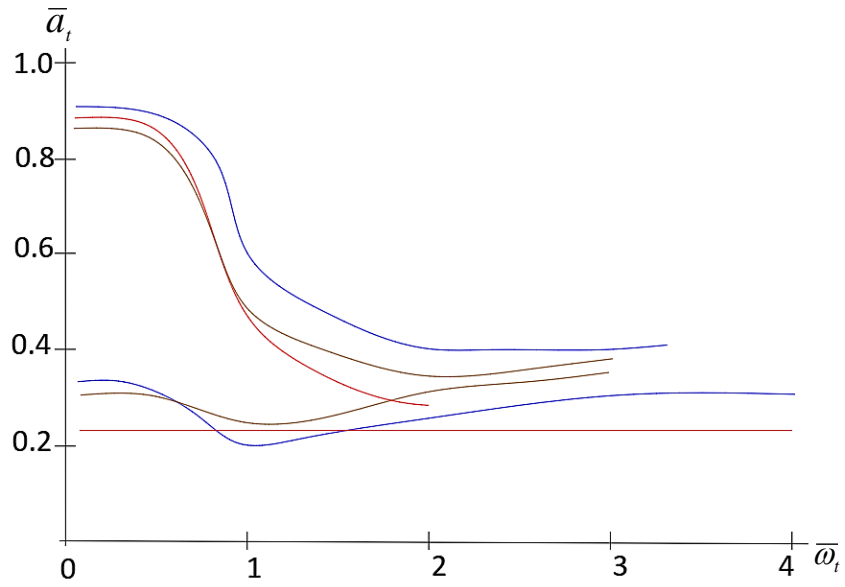
Şəkil 4.3. Yüksək möhkəmlikli xüsusi poladın müxtəlif modifikasiyalarından hazırlanmış borularda,  $K_i$ -nin örtük materialının sıxlığından asılılığı ( $k \cdot 10^6, E \cdot 10^9$ )

Aşağıdakı qrafikdə (şəkil 4.4.)  $K_i$ -nin dəyişməsinin, qeyri-klassik polimer materiallardan yüksək möhkəmlikli xüsusi poladdan və alüminium, duralumin, mis, çuqun, invar, dəmir və s. hazırlanmış borulardakı örtük materialının elastiklik modulundan asılılığı təsvir olunmuşdur.



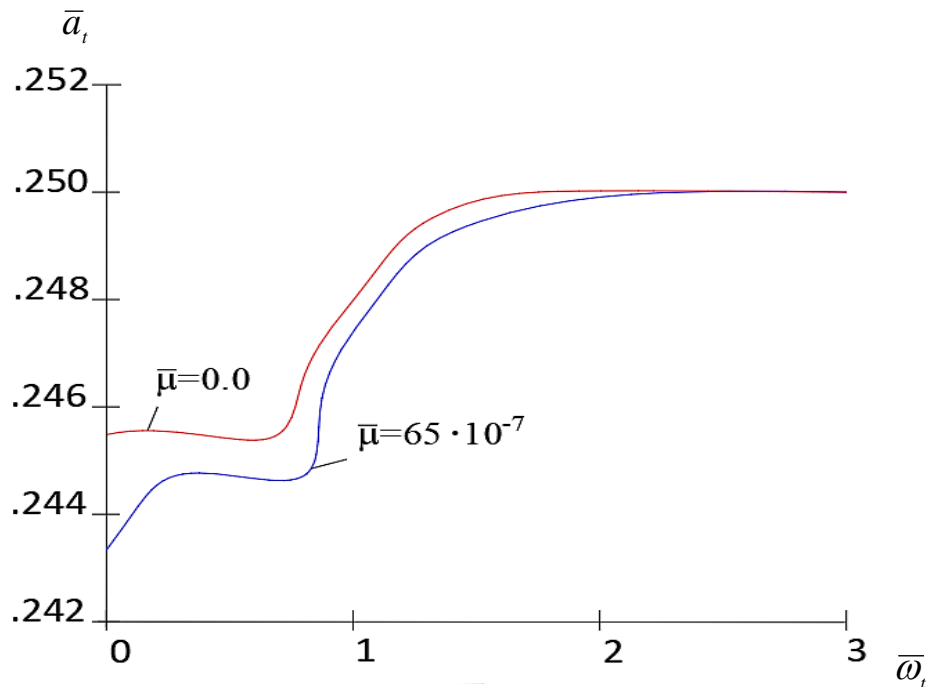
Şəkil 4.4. Qeyri klassik materiallı örtüklər üçün  $K_i$  və elastiklik modulu arasında

## asılılıq



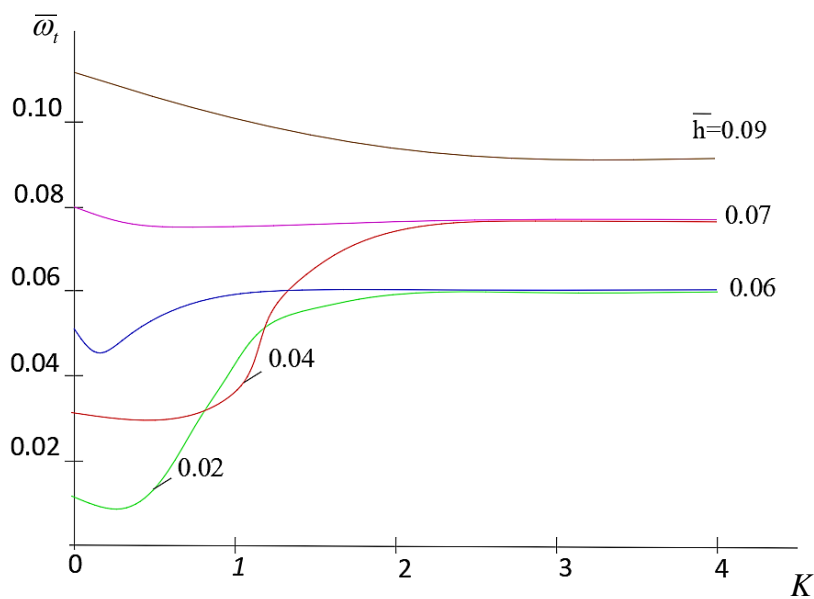
Şəkil 4.5. Fiziki sistemin fiziki və həndəsi parametrlərinin fərqli qiymətlərində fazaların sürətinin dəyişməsinin qanunauyğunluqları

Şəkil 4.5. tərkibində qaz qabarcıqları olan təmiz su və sənaye yağı ilə doldurulmuş örtüyün vəziyyətinə aiddir. Ədədi hesabatın nəticələri fazaların sürətinin (qaz-maye və örtük) uzununa dalğaların yayılma tezliyindən asılılığını əks etdirir. Nəticələr müvafiq olaraq [119], [106]- da əldə edilən nəzəri və təcrübi nəticələrlə üst -üstə düşür.



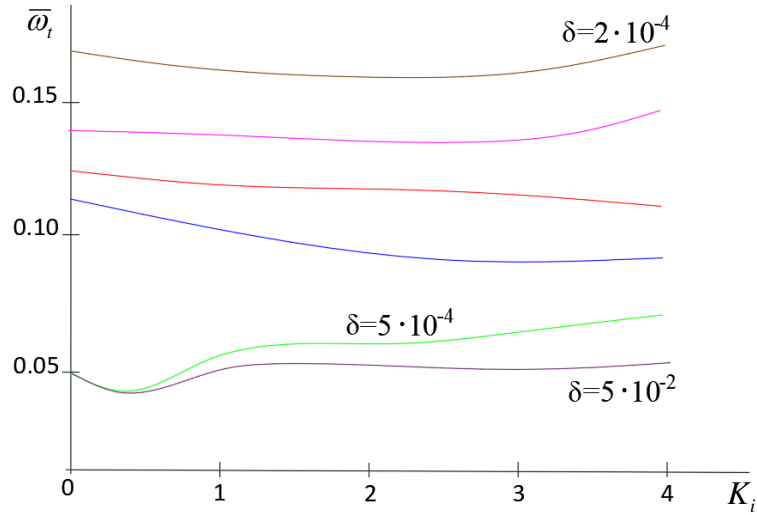
Şəkil 4.6. Qarışıqın faza sürətinin tezlikdən asılılığı

Özlü maye və qaz-maye qarışığında akustik dalğaların yayılma tezliyinə nəzərən özlülük əmsalının təsiri nəzərə çarpacaq qədər olmadığından nəzərdən atıla bilər [126].



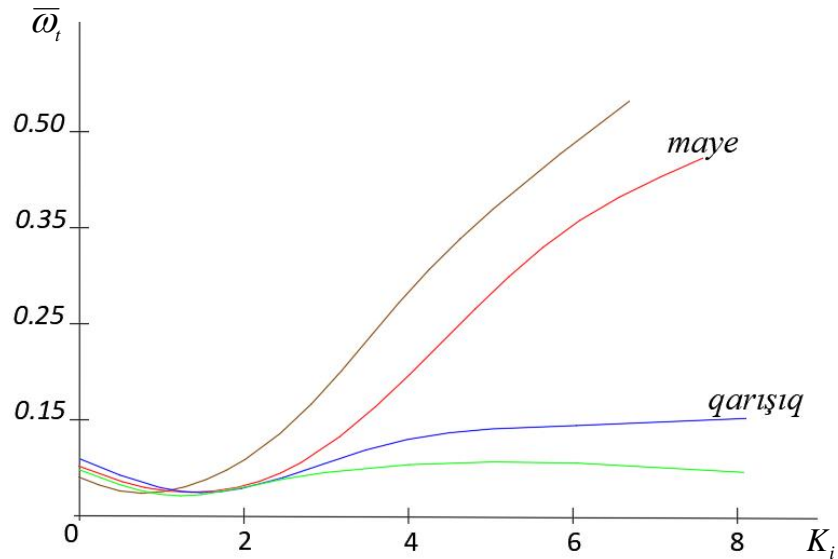
Şəkil 4.7. Tezliyin qiymətinin örtük divarının qalınlığından asılılığı

Şəkil 4.7- tərkibində böyük qaz qabarcıqları olan maye qaz qarışığı ilə doldurulmuş örtüyün divarının qalınlığının örtüyün rəqslərinin ölçüsüz tezliyinin qiymətinə təsiri göstərilmişdir. Nəticə, örtüyün qalınlığı artdıqca, sətliyin artdığını və buna görə də qalın divarlı örtüyün tezliyinin nazik divarlı örtüyün tezliyindən daha yüksək olduğunu əks etdirir. [18], [126] və [127]- da göstərildiyi kimi, bu nəticə biomexanikanın öyrəndiyi obyektlər üçün - canlı orqanizmlər və bitkilər üçün xarakterikdir.



Şəkil 4.8. Tezliyin qiymətinin qabarcığın ölçüsündən asılılığı

Şəkil 4.8.- də örtük divarının qeyd olunmuş qalınlığı üçün örtükdəki dalğaların yayılma tezliyinin qabarcıqların ölçüsündən asılılığını izah edən ədədi hesablamaların nəticələri verilib. Tərkibində kiçik qabarcıqlar olan bir qarışıq üçün, örtüyün tezliyinin qiyməti böyük qabarcıqlar olan örtüyün tezliyini üstələyir.



Şəkil 4.9. Tezliyin qiymətinin qabarcıqlardan asılılığı

Şəkil 4.9.- da örtüyün həndəsi və təcrübi-fiziki parametrlərinin seçilmiş qiymətlərində örtükdə kiçik qabarcıqlı maye (su) və qaz-maye qarışığı olduqda dalğanın yayılma tezliyinin dalğa ədəmindən asılılığı göstərilmişdir. Qrafikdən görüldüyü kimi, təmiz

su doldurulmuş örtükdə tezliklərinin qiyməti həmişə qarışıq olan haldakı qiymətdən böyük olur.

#### Fəslin əsas nəticələri

1. Tədqiqatın nəticəsində bəlli olmuşdur ki, maye ilə birgə örtüklərin hidroelastiklik məsələləri universal tənliklər sistemi və başlanğıc-sərhət şərtləri daxil olan riyazi modelin qurulması və bütöv mühit mexanikasının aktual məsələlərədən biri kimi həll edilməlidir. Bu səbəbdən, mayenin sistemə göstərdiyi təsir qüvvəsini müəyyən edərkən, sistemin öz deformasiyası da nəzərə alınıb. Müasir texnoloji proseslərdə və canlı orqanizmlərdə deformasiyalanan sistemin fiziki və mexaniki xassələrinin qabarcıqlı maye ilə qarşılıqlı təsirin nəticəsindən asılı olduğu göstərilmişdir.
2. Problemin həll prosesində daxilində qabarcıqlı maye ötürülən örtüklərdə qeyri-stasionar dinamik proseslərin qarışıqın sıxılan olmasının və özlülüyünün təsirinin qiymətləndirilməsi ilə aparılmış, örtüyün qeyri-klassik materiallardan hazırlandığı hallarda isə daha mürəkkəb riyazi modelin seçilməsini və məsələlərin 3D formatında riyazi analizinin vacibliyi göstərilir.
3. Baxılan məsələdə mayenin heterogenliyinin məsələnin həllini mürəkkəbləşdirdiyi, yeni effektlərin yarandığı səbəbindən, homogen mühitlərin modelindən fərqli model seçilməli və sistemin hərəkətinin fərqli elmi əsaslarının yaradılmasının vacibliyi göstərilmişdir.
4. Göstərilmişdir ki, rəqslərin koordinatlara görə dekrementinin qiymətləri boru materialının sərtliyinin böyük qiymətlərində nəql olunan maye qarışığının xassələrindən cüzi asılıdır və əksinə, çevik (nisbətən kiçik sərtlikli) borularda maye qarışığının fiziki xassələrinin rəqslərin koordinatlara görə dekrementinin qiymətlərinə təsiri böyük olur.
5. Alınmış ədədi nəticələri texnoloji proseslərdə, neft-qaz sənayesində, tədricən də canlı orqanizmlərdə baş verən hidrodinamik proseslərin öyrənilməsində tətbiq oluna bilər.

Parametrlərin seçilmiş qiymətlərində və sistemin funksional rejimində, aşağıdakı nəticələri doğrudur:

- Oxun müsbət istiqamətində rəqslərin fazası, faza sürətinə çevrilir. Bu hal sönmə rejimində həyəcanlanma amplitudunun faza sürətinin və rəqs fazasının yayılma istiqamətində olduğu rejimə müvafiqdir.
- İkifazalı mayedə hər iki fazanın sürətinin eyni olduğu hal üçün alınmış nəticələr akustik həyəcanlanmaların dekrementinin yayılma istiqamətini göstərir.



## Nəticə

1. İkifazalı özlü mayenin deformasiya olunan elastiki örtüklərdə axınında müəyyən olunmuşdur ki,  $\delta_0$ -mühitdə qaz qabarcıqlarının vahid həcmi konsentrasiya əmsalı  $\alpha_2$ -dən asılı olaraq artır. Ədədi hesablamalar örtük-ikifazalı mühit sistemində  $\alpha_2 = 0.01 \div 0.1$  intervalında dəyişdiyi halları özündə əks etdirir.
2. İkifazalı maye mühitin (sıxılmayan xətti özlü maye və sıxılan qaz qabarcığı) elastiki silindrik boruda hərəkəti prosesində boruda dalğaların yayılma sürəti azalır, mayenin özlülüyünün hərəkətin xarakteristikalarına təsiri kiçik olur.
3. Özlü sıxılmayan maye və qabarcıqlı sferik fazanın silindrik özlü elastiki boruda pulsvari axınında yaranan dalğaların sürəti qabarcığın həcmi konsentrasiya əmsalından və borunun nisbi uzunluğundan asılı olaraq kiçilməsi, qarışıqın axın sürətinin isə artması göstərilmişdir.
4. Hesablamanın nəticələrinin müqayisəsi göstərir ki “ortotrop elastiki boru-özlü maye qarışığı” sistemi vasitəsilə ötürülən dalğaların dispersiyasının çevik elastiki örtüklərin divarlarının fiziki xassələrindən və daha sərt örtüklər halında mayenin özlülüyündən asılı olduğunu göstərir. Böyük tezliklərdə örtüyün elastikliyinə üstünlük yaratdığı hərəkət forması, ikinci halda isə hidravlik formanın təmin etdiyi kiçik tezliklərdə dalğanın yayılması qabarıq olur.
5. Mühitin fiziki parametrlərindən asılı olaraq sürətin, yerdəyişmənin, sıxlığın və hidrodinamiki təzyiqin qiymətində ikifazalı mühitdə qabarcıqların həcmi konsentrasiya əmsalı artdıqca, kifayət qədər dəyişiklik hiss olunur.
6. Müəyyən edilmişdir ki, daşıyıcı fazanın sıxlığının və stasionar qiymətdən etibarən axının sürətinin artımı, həmin stasionar qiymətdən başlayaraq, təzyiq düşgüsü və örtüyün divarının radial yerdəyişməsinin qiymətlərində azalma baş verir.
7. Göstərilmişdir ki, sükunətdə olan maye ilə doldurulmuş böyük uzunluqlu silindrik elastik örtükdə kiçik həyəcanların yayılması zamanı oxun müsbət istiqamətində yaranan dalğanın yayılma sürəti, faza sürətinə çevrilir. Bu hal sönmə rejimində həyəcanlanma amplitudunun faza sürətinin və rəqs fazasının yayılma istiqamətində olduğu rejimə müvafiq olur.

### **İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı**

1. Əkbərli, R.S. Özlü qabarcıqlı mayelərlə doldurulmuş deformasiyalanan boruda dalğalar // Azərbaycan xalqının Ümummillə Lideri H. Əliyevin anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Elmi Konfransının materialları, –Bakı: -2013, -s. 63-64
2. Əkbərli, R.S. Özlü-elastik boruda sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti // AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. Y.Ə.Əmənzadənin 100-illik yubileyinə həsr olunmuş “Mexanikanın klassik və müasir problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, –Bakı: -2014, -s. 77-78
3. Əkbərli, R.S., Salmanova G.M., Pənahova S.Q. Deformasiyalanan boruda özlü mayenin hərəkəti zamanı yaranan xətti dalğalar // Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfrans, -Sumqayıt: -2017, -s. 110-111
4. Əkbərli, R.S. Özlü-elastik boruda sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti // Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, -2014. №3, -s. 79-85
5. Əkbərli, R.S. Deformasiya olunan boruda hərəkət edən mayelərdə yaranan dalğaların yayılması prosesi / Əkbərli, R.S., Salmanova, G.M. // Nəzəri və tətbiqi mexanika jurnalı, -Bakı: -2015. №2, -s. 20-23
6. Əkbərli, R.S. Nazikdivarlı elastiki silindirik örtükdə mayedəki kiçik amplitudlu dalğaların yayılması / Əkbərli, R.S., Əliyev, A.B. // Nəzəri və Tətbiqi mexanika, Ali məktəblər arası elmi-texniki jurnal, -Bakı: -2017, №1-2
7. Əkbərli, R.S. Özlü elastiki boruda özlü mayenin hərəkəti zamanı yaranan xətti dalğalar/ Əkbərli, R. S., Əliyev A. // AzMİU-nun Elmi Əsərlər jurnalı, -Bakı:– 2017. №1, -s. 64-69
8. Əkbərli, R.S. Qeyri bircins mayenin boruda hərəkətinə boru divarında yaranan çöküntünün təsiri / Əkbərli, R.S., Əliyev, A., Kiyasbəyli, E. // Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti Elmi Əsərlər, -Bakı: –2017. №1, -s. 60-64
9. Əkbərli, R.S., Sevdimaliyev, Y.M., Salmanova G.M. Sıxılmayan qabarcıqlı özlü mayenin özlü-elastiki boruda rəqsi hərəkəti // AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., prof., Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş “Nəzəri və

tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri” Respublika elmi konfransının materialları, -Şəki: -2016, -s. 272-273

10. Акперли, Р.С. Распространения волн в жидкостях, протекающих в деформированных трубах / Акперли, Р.С., Salmanova, G.M. // Актуальные направления научных исследований XXI века-теория и практика, -2019. №1(44) (Volume7, issue1), -с. 343-345
11. Акперли, Р.С., Sevdimaliyev, Y.M., Salmanova, G.M. Пульсирующее течение двухфазной сжимаемой вязкой жидкости в вязко-упругой трубе // XVIII Международная конференция-Моделирование и исследование устойчивости динамических систем, -Киев(Украина): -2017 мая 24-26, -с 135
12. Акперли, Р.С. Волновое движение пузырьковой вязкой жидкости в вязкоупругой трубе / Акперли, Р.С., Киясбейли, Э.Т. // Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, -2019. №3, -s. 74-81
13. Акперли, Р.С. Распространение волн в жидкости, протекающей в упругой трубе // Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Elmi Konfransının materialları –Bakı: -2015, -s. 100-102
14. Акперли, Р.С. Пульсирующее течение несжимающей вязко-упругой жидкости в упругой трубке / Акперли, Р.С., Алиев, А.Б., Киясбейли, Э.Т. // Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti Elmi Əsərlər, -2019. №1, -s. 221-229
15. Акперли, Р.С. Распространение волн в жидкости, протекающей в упругой трубе // Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації» Вип.59, -Переяслав, -2020, -с. 478-480
16. Авербух, А.З. Колебания элементов конструкций в жидкости / Авербух, А.З., Вейцман, Р.И., Генкин, М.Д. // М.Наука, -1987. –160 с.

17. Аврамов, К. Хаотические колебания пластин, взаимодействующих с потоком жидкости / Аврамов, К., Стрельникова, Е. // Прикладная механика, -2014., -Т.50 №3, -с. 303-309
18. Алексеев, В.Н. Колебания газовых пузырьков в упругих средах / Алексеев, В.Н., Рыбак, С.А. // Акуст. журн. -1999., -Т.45, №5, -с. 603–609.
19. Амензаде, Ю.Н. О распространении малых возмущений в вязкоупругой жидкости, заключенной в многослойную вязкоупругую трубку / Амензаде, Ю.Н., Киясбейли, Э.Т., Насирзаде, А.А. // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, –Казань: -2010. -с. 16-20
20. Амензаде, Р.Ю. Неосесимметричное колебание идеальной жидкости в упругой оболочке // ДАН.СССР, -1976., -Т229 №3, -с. 566-568
21. Амензаде, Р.Ю. Об одном решении задачи о пульсирующем течении жидкости в многослойной упругой трубке переменного сечения / Амензаде, Р.Ю., Насибов, В.Г. // ДАН России, -1994., -т.335, №6, -с. 714-715
22. Амензаде, Р.Ю. Асимптотический анализ влияния сдвига на волновые характеристики в оболочке, содержащей идеальную жидкость // Докл. РАН, –1996., -Т.347, №4, -с. 475-477.39
23. Амензаде, Р.Ю., Ализаде, А.Н., Дамиров, Н.Г. О динамических уравнениях неоднородных по толщине упругих анизотропных оболочек // Материалы 2-й Всесоюз. научно-техн. конф. "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов". –Ереван(Изд-во Ереван ун-та, -1984, Т.1, -с. 35-40.40
24. Амензаде, Р.Ю. Асимптотический анализ влияния сдвига на волновые характеристики многослойной цилиндрической оболочки с жидкостью / Амензаде, Р.Ю., Кийко, И.А. // Изв. РАН. МТТ, -2007. №3, -с. 107-114
25. Баязитова, Я.Р. О динамика звуковых волн в трубе с эластичными стенками, заполненной пузырьковой жидкостью / Баязитова, Я.Р., Гимаятдинов, И.К. // Вестник Южно-Уральского ГУ., Серия Математика механика. Физика, -2014., -т.6, №4, -с. 13-19

26. Болотин, В.В. Поля давлений внутри оболочек, совершающих случайные колебания // Инженерный журнал. Механика твердого тела, -1968. №1. -с. 74-81
27. Болотин, В.В., Трифонов, О.В., Чирков, В.П. Методы нелинейного анализа и оценки форм обрушения конструкций при экстремальных динамических воздействиях // Вестник отделения строительных наук РААСН, -2005, -вып.9, -с. 113-118
28. Босяков, С.М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / Босяков, С.М., Чживэй, В. // Механика машин, механизмов и материалов, -2011. №3(16), -с. 24-27
29. Бреславский, В.Е. Колебания цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Труды IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин, -Ереван, -1962, -1964
30. Иванович, В. Математическое моделирование некоторых задач пограничного слоя в газовзвесах, -Забарин, -2005 год
31. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // Наука, -1972. -с.432
32. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости // -М.: Наука, -1979. -с.320
33. Власов, В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике // -М.: Наука, -1949. -с.784
34. Власов, В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек // М. Изд. во АН - СССР, -1962. -с. 528
35. Григоренко, А.Я. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке / Григоренко, А.Я., Ефимова, Т.Л., Соколова, Л.В. // Теорет. и прикл. Механика, – 2008., -Вып.43, -с. 111–117
36. Гольденвейзер, А.А. Свободные колебания тонких упругих оболочек / Гольденвейзер, А.А., Лидский, В.Б., Товстик, П.Е. // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, -1979. -с. 384

37. Гузь, А.Н. Гидроупругость систем оболочек / Гузь, А.Н., Кубенко, В.Д., Бабаев, А.Э. // К.: Вища школа, -1984. -с. 208
38. Гузь, А.Н. Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. Механика, -1980-16. №10, -с. 10-20
39. Голованов, А.И. Исследование свободных колебаний оболочек методом конечных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек, -1991. -Вып.23, -с. 81-85
40. Губайдуллин, Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред // Изд-во Казанской Математического общества, -1998. -с. 153
41. Губайдуллин, Д.А. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах / Губайдуллин, Д.А., Федоров, Ю.В. // ПММ, -2013., -т.77, №5, -с. 421-455
42. Гулгазарян, Г.Р. Колебания тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным краями / Гулгазарян, Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Саакян, Р.Д. // ПММ, -2008., -т.72.Вып.3, -с. 453-465
43. Гуревич, М.И. Теория струй идеальной жидкости, М.Физматгиз, -1961,
44. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины, оболочки // М.Наука, -1982. -568 с.
45. Гиченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / Гиченко, В.Т., Мелешко, В.В. // наук, -Киев, -1981. -284 с.
46. Филиппенко, Г.В. Энергетические аспекты осесимметричного распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // Вычислительная механика сплошных сред, -2013., -т.6, №2, -с. 189-197
47. Филиппенко, Г.В. Энергетические аспекты распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // Вычислительная механика сплошных сред -2014., -т.7, №3, -с. 295-305
48. Фролов, К.В. Колебания оболочек в жидкости / Фролов, К.В., Антонов, А.Н. // М.Наука, -1983. -365 с.

49. Ильгамов, М.А. Обзор исследований по взаимодействию акустической среды и упругих оболочек // Исслед. по вибрац. горению и смежн. вопр. Казань, -Казан ун-т, -1974. -с. 3-18
50. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями // М.Наука, -1986. -504 с.
51. Клименко, Д.В. Колебания жидкости в упругих оболочках с разным уровнем их заполнения, Космическая техника / Клименко, Д.В., Тонконоженко, А.М., Гнитько, В.И., Дегтярев, К.Г., Стрельникова, Е.А. // Ракетное вооружение, -2015. -Вып.3(110), -с. 24-29
52. Кадыров, С.Г. Нестационарные проблемы гидроупругости / Кадыров, С.Г., Перцев, А.К. // - СПб.: Наука, -2012. -250 с.
53. Кильчевского, Н.А. Механика систем оболочка жидкость- нагретый газ // под.ред.акад.Ан УССР -Киев, -1970. -328 с.
54. Коренев, Б.Г. Введения в теорию Бесселовых функций // М.Наука, -1971, -283 с.
55. Марчук, Р.А. Влияние анизотропии материала на распространение волн в цилиндрической оболочке, заполненной акустической жидкостью // Математичні методи та фізико-механічні поля, -1977., -Т.5., -с. 86-87
56. Мехтиев, М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек // Элм -Баку, -2019. -320 с.
57. Муштари, Х.М. Нелинейная теория оболочек // М.:Наука, -1990. -223 с.
58. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы[Текст] / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик // М.:ФИЗМАТЛИТ, -2009. -292 с.
59. Мнев, Е.Н. Гидроупругость оболочек / Мнев, Е.Н., Перцев, А.К. // Л.:Судостроение, -1970. -365 с.
60. Навал, И.К. Осесимметричные волны в ортотропной цилиндрической оболочке / Навал, И.К., Сабодаш, П.Ф. // Механика композитных материалов, -1981. №5, -с. 924-928
61. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек // Л.: Судпромгиз, -1962. -431 с.

62. Нигул, У.К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин // Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, -Москва, -1970, -с. 846–883
63. Новожилов, В.В. Линейная теория тонких оболочек / Новожилов, В.В., Черных, К.Ф., Михайловский, Е.И. // Л.«Политехника», -1991. -656 с.
64. Панфилов, И.А. Гармонические колебания и волны в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией / Панфилов, И.А., Устинов, Ю.А. // Изв.РАН.МТТ, -2012. №2, -с. 48-58
65. Панфилов, И.А. Колебания и волны в цилиндре с винтовой анизотропией / Панфилов, И.А., Устинов, Ю.А. // Акустический журнал, -2010., -т.56, №6, -с. 759-766
66. Павловский, В.С. Исследование колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость / Павловский, В.С., Борисенко, В.И. // Прикл. мех., -1969. -Т.5, №6
67. Петров, А.Г. Аналитическая гидродинамика // М.: Физматлит, 2010. -520 с.
68. Прандтль, Л. Гидромеханика- Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", -2000. -576 с.
69. Левич, В.Г. Физико- химическая гидродинамика // Госуд: Физматмет, -Москва: -1959. -699 с.
70. Соколов, А.Н. Колебания армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // XXVII сессия Российского акустического общества, посвященная памяти ученых-акустиков ФГУП «Крыловский государственный научный центр» А.В. Смольякова и В.И. Попкова, -Санкт-Петербург, -2014 апреля 16-18
71. Седов, Н.Л.И. Механика сплошной среды, Главная редакция Физико-математической литературы издательства // «Наука», -1976. -576 с.
72. Седов, Л.И. Теоретическая гидродинамика / Седов, Л.И., Черный, Г.Г. // Оборонгиз, -1954. №12, -вып.4
73. Седов, Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики // М.«Наука», -1950 и 1966



74. Стретт, Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука (Том I) // ГИТТЛ, -1940. -496 с.
75. Стретт, Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука (Том II) // ГИТТЛ, -1955. -503 с.
76. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / Тимошенко, С.П., Войновский-Кригер, С. // М.: Наука, 1966. -636 с.
77. Тютюкин, В.В. О винтовых волнах упругой цилиндрической оболочки // Акустический журнал. -2004. -т.50, №3. -с.331-336
78. Устинов, Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики, -2003. №4, -с. 37–62
79. Филин, А.П. Элементы теории оболочек // Л. ~~Наука~~, -1975. -256 с.
80. Эфрос, Д.А. Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения, -ДАН СССР, -1946. -т.1, №4
81. Akbarly, R.S. Pulsational motion of a mixture in a vibrating medium with consider flow rate / Akbarly, R.S., Salmanova, G.M. // International journal on technical and physical problems of engineering, (IJTPE) Issue, -31Volume, -9 Number, -2017 June 2, -Serial No: 0031-0902-0617
82. Akbarly, R.S., Salmanova, G.M. Pulsational motion of a mixture in a vibrating medium // III Міжнародна конференція «розвиток науки у вік інформаційних технологій», -м.Київ: -2017 вересня 30, -с. 52-54
83. Akbarly, R.S. The mathematical analysis of the hydrodynamic characteristics of a shell-liquid system with spherical air bubbles / Akbarly, R.S., Salmanova, G.M. // International scientific journal Science and World, -Volgograd: -2017. №7(47), -с. 8-14
84. Akbarly, R.S. Waves propagation in the fluid flowing in an elastic tube, considering viscoelastic friction of surrounding medium // International Journal on technical and physical problems of engineering (IJTPE) Issue, 35 Volume, 10 Number, -2018 June 2, -p. 39-42
85. Akbarly, R.S. Features of the behavior of gas-liquid mixture tubes // The 15th International Conference on Technical and Physical Problems of Electrical Engineering, -Istanbul(Turkey): -2019 october 14-15, -p. 203-205

86. Akbarly, R.S. Positional motion of a mixture in a vibrating medium / Akbarly, R.S., Salmanova, G.M., Nagieva, N.M // «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях ГЛОБАЛИЗАЦИИ», 2019 мая 31, - года Вып.47, -с. 424-426
87. Akbarly, R.S., Sevdimaliyev, Y.M., Salmanova, G.M. Mathematical Analysis for a Condition of the Hydrodynamic Characteristics 8Th international Eurasian Conference On Mathematical Sciences And Applications, -Baku: -2019.
88. Akbarly, R.S. Features of the behavior of gas-liquid mixture tubes // International Journal on Technical And Physical Problems Of Engineering (IJTPE) -2020. -Issue 43Vol.12, №2, -p. 71-77
89. Akperli, R.S. Wavy Motion of Viscous Bubbly Liquid in Tubes of Orthotropic Material / Akperli, R.S., Amenzadeh, R.Y., Naghiyev, F.B. // International Journal of Chemoinformatics and Chemical Engineering, 2(1), -2012 January-June, -p. 39-47
90. Akbarov, S.D. Mathematical modeling of the dynamics of a hydroelastic system - A hollow cylinder with inhomogeneous initial stresses and compressible fluid / Akbarov, S.D., Sevdimaliyev Y.M., Valiyev, G.J. // Math Meth Appl Sci., - 2021. 44:7858-7872
91. Brennen, C.E. Cavitation and bubble Dynamics // Oxford University Press.Oxford, -1995, -p. 47-67
92. Brodkey, R.S. The phenomena of fluid motions // Addison-Wesley Publishing Company, -1967. 737 с.
93. Commander, K.W. Linear pressure waves in bubble liquids: Comparison between theory and experiments / Commander, K.W., Prosperetti, A. // J.Acoust. Soc. Amer, -1989.V.85, №2, -p. 732-746
94. Chen, W.Q. On eigenfrequencies of an anisotropic sphere [Text] / W.Q. Chen, J.B. Cai, G.R. Ye, H.J. Ding // Trans. ASME.J.Appl.Mech. -2000. -V.67, №2, - p. 422-424

95. Delale, C.F. Kabarcık dinamiği ve kavitasyonlu akışlardaki son gelişmeler // Ulusal Mekanik kongresi, -Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, -2019 Eylül 02-06, -A4-1-A4-14
96. D'Armond, R.P. Wave propagation of viscous compressible liquids confined in elastic tubes / D'Armond, R.P., Roulean, W.T. // N.Y., ASME Paper, -1972. № FE-23, - 6 p.
97. Eynatollah, A.Taheri Investigation of Free Vibrations Of Spherical Inclusion Containing Elastically Suspended Mass Situated in Acoustic Medium by the Inverse Method [Text] / Eynatollah, A.Taheri, Rustamova, Mashati // International Journal of Nanosystems, -2010. -Vol. 3, -p. 23-25
98. Flugge, W. Stresses in Shells // Springer, -New York: -1973
99. Fuller, C.R., Fahy, F.J. Characteristics of wave propagation and energy distribution in cylindrical elastic shells filled with fluid / Fuller, C.R., Fahy, F.J. // Journal of Sound and Vibration, -1982. -81(4), -p. 501-518
100. Gromeka, I.S. On the speed of wave-like propagation of fluid motion in elastic tubes // Collection of minutes of the meeting of the Phys.-Math Of Sciences of the Society of Naturalists at Kazan University, Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR, Department of Technical Sciences, V.1. –Kazan: 1883, 1952.
101. Guo, Y.P. Approximate solutions of the dispersion equation for fluid loaded cylindrical shells // Journal of the Acoustical Society of America, -1994. -95(3), -p. 1435-1440
102. Kunte, M.V. Asymptotic expansions for the coupled wavenumbers in an infinite orthotropic flexible fluid-filled cylindrical shell / Kunte, M.V., Sarkar, A., Sonti, V.R. // Journal of the Acoustical Society of America, -2012. -131(6), -p. 4272-4282
103. Landau, L.D. Hydromechanics / Landau, L.D., Lifshits, E.M. // Moscow: Nauka, -1988. -736 p.
104. Latifov, F.S. The problem of natural vibrations of an orthotropic cylindrical shell filled with a moving fluid in a linearly elastic medium / Latifov, F.S.,

- Seifullaev, F.A. // Mechanics of machines, mechanisms and materials, -2010. №3(12), -p. 50-53
105. Lamb, H. On the velocity of sound in a tube, as affected by the elasticity of the walls // Manchester Memoirs, -1898. -42(9), -p. 1-16
106. Lin, T.S. Wave Propagation through Fluid Contained in a Cylindrical, Elastic Shell / Lin, T.S., Morgan, G.W. // The Journal of the acoustical society of America, -1956. -Vol.28, №15, -p. 1165-1176
107. Leissa, A.W. Vibration of shells // -Washington: NASA, -1973. - 428 p.
108. Liu Yu-Cheng. Dispersion relations and modal patterns of wave in a cylindrical shell / Liu Yu-Cheng, Yun-Fan Hwang, Jin-Huang Huang. // Wave process in classical and new solids, Prof. Pasquale Giovine (Ed.), -2012. ISBN:978-953-51-0821-4, in tech, DOI: 10.5772/50477
109. Love, A.E.H. On the small free vibrations and deformations of thin shells // Philosophical Transactions of the Royal Society, -London: 1888. -179A, -p. 491-546
110. Manconi, E. Wave characterization of cylindrical and curved panels using a finite element method / Manconi, E., Mace, B.R. // Acoustical Society of America, -2009. -p. 154-163
111. Mehdiyev, M.F. Asymptotic analysis of the dynamic problem of the theory of elasticity for a transverse isotropic hollow cylinder / Mehdiyev, M.F., Bergman, R.M. // Journal of sound and vibration, -2001. -Vol.244, №2, -p. 177-194
112. Mehdiyev, M.F. Vibrations of hollow elastic bodies // Монография. Springer, -2018. -212 p.
113. Mehdiyev, M.F. Asymptotic Analysis of Spatial Problems In Elasticity // Монография. Springer, -2019, -241 p.
114. Nigmatulin, R.I. Multiphase Dynamics // P.1,М., -1987. -464 p.
115. Nigmatulin, R.I. Waves in liquids with bubbles / Nigmatulin, R.I., Gubaidullin, A.A., Ivandaev, A.I., Khabeev, N.S. // Results of Science and Technology. Ser. mechanics of liquid and gas, -Moscow(VINITI): -1982. №17, -247 p.

116. Nigmatulin, R.I. Dynamics, Heat and Mass Transfer of Vapour-Gas Bubbles in a Liquid / Nigmatulin, R.I., Khabeev, N.S., Nagiev, F.B. // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. -1981. -24, -1033 p.
117. Panfilov, I.A. Harmonic Vibrations and Waves in a Cylindrical Helically Anisotropic Shell / Panfilov, I.A., Ustinov, Yu.A. // *Harmonic Mechanics of Solids*, -2012. -Vol.47, №2, -p. 195-204
118. Prakash, Vijay S. Asymptotic expansions for the wavenumbers in orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells for intermediate fluid loading / Prakash, Vijay S., Sonti, V.R. // *Journal of Acoustical Society of America*, -2014 June. -135(6), -p. 3198-3208
119. Redwood, M., *Mechanical Waveguides* // Pergamon Press, New York-Oxford-London-Paris: -1960
120. Sarkar, A. Asymptotic analysis for the coupled wavenumbers in an infinite fluid-filled flexible cylindrical shell, the axisymmetric mode / Sarkar, A., Sonti, V.R. // *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, -2007. 21(3), -p. 193-207
121. Sedov, L.Í. *Continuum mechanics* // M.:Nauka, -1970. -Part 1, -492 p.
122. Scott, J.F.M. The free modes of propagation of an infinite fluid-loaded thin cylindrical shell // *J. Sound Vib.* -1988. №125, -p. 241-280
123. Soe-Knudsen, A. On accuracy of the wave finite element predictions of wavenumbers and power flow: A benchmark problem / Soe-Knudsen, A., Sorokin, S. // *Journal of Sound and Vibration* 330, -2011. -p. 2694-2700
124. Tomita, A., Shima, A. On the behaviour of a spherical bubble and the impulse pressure in a viscous compressible liquid, *Bull JSME*20, -1977. -p. 1453-1460
125. Ventsel, E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid / Ventsel, E., Naumenko, V, Strelnikova, E., Yeseleva, E. // *Engineering analysis with boundary elements*. -2010. № 34, -p. 856-862
126. Volmir, A.S. *Shells in the flow of liquid and gas: Problems of hydroelasticity* // - Moscow: Nauka: -1979. -320 p.

127. Van Wijngaarden, L. Some problems in the formulation of the equations for gas liquid flows // Theoretical and applied mechanics-Proceedings of the 14th IUTAM Congress Delft, The Netherlands: -1976 30August, 4 September. -p. 249-260
128. Wilson, P.S. Phase speed and attenuation in bubbly liquids inferred from impedance measurements near the individual bubble resonance frequency / Wilson, P.S., Roy, R.A., Carey, W.M. // J.Acoust. Soc. Amer. -2005. V.117. №4. -p. 1895-1910
129. Womersley, J.B. Oscillatory flow in arteries: the constrained tube as a model of arterial flow and pulse transmission // Physics in Med. and Biol., -1957. №2, -p. 178-187
130. Wen, Huanyao. Review on mathematical analysis of some two-phase flow models / Wen, Huanyao., Yao, Lei., Zhu, Changjiang. // Acta Mathematica Scientia, -2018 Sep., -Volume 38, -p. 1617-1636
131. Watson, G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions 2nd ed: Cambridge Scientific Publishers, -1966.
132. Xi, Z.C. Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells / Xi, Z.C., Liu, G.R., Lam, K.J., Shang, H.M. // J. Acoust. So c.Am., -Pt.1, -Nov., -108(5)
133. Zhukovsky, N.Ye., Hydraulics // Full soob., ONTI NKTP, -Moscow: -1937. - Vol.7, -410 p.
134. Zhukovsky, N.Ye. About water hammer in water pipes // Bulletin of the Polytechnic Society State publishing house of technical and theoretical literature, -Moscow: -1949. -Leningrad: 1899. №5, -108 p.